

# As transições dos estudantes entre panoramas do conceito de derivada

Students' transitions between perspectives on the concept of derivatives

Josenilson Lopes Lola<sup>1</sup>  
Jonei Cerqueira Barbosa<sup>2</sup>

## Resumo

Este estudo teve por objetivo identificar e caracterizar como os estudantes transitam entre os panoramas de um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada. Adotamos uma abordagem qualitativa com dados produzidos por meio de filmagem, registro fotográfico e diário de campo, envolvendo estudantes matriculados em um curso introdutório de Cálculo Diferencial. Com base na abordagem comunicacional da pesquisadora Anna Sfard, utilizamos o referido modelo teórico como estrutura analítica para produção e análise de dados. As *realizações* observadas revelaram que as transições ocorreram com os propósitos de Confirmação, Verificação e Instrumental. Desse modo, identificar e caracterizar essas transições pode facilitar a integração de novos alunos, contribuir para o desenvolvimento do discurso sobre derivada e ajudar no desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a resolução de tarefas. Além disso, os resultados podem favorecer professores que ministram disciplinas introdutórias de Cálculo Diferencial, auxiliando no planejamento de atividades de ensino.

**Palavras-Chave:** *Realizações*; Transições; Modelo Teórico; Derivadas.

## Abstract

This study aimed to identify and characterize how students transition between the panoramas of a Theoretical Model of Mathematics for Teaching the Concept of Derivative. We adopted a qualitative approach with data produced through filming, photographic records and field diaries, involving students enrolled in an introductory course in Differential Calculus. Based on the communicational approach of researcher Anna Sfard, we used the aforementioned theoretical model as an analytical structure for data production and analysis. The observed achievements revealed that the transitions occurred with the purposes of Confirmation, Verification and instrumental. Thus, identifying and characterizing these transitions can facilitate the integration of new students, contribute to the development of discourse on derivatives and help in the development of skills and competencies necessary for solving tasks. In addition, the results can benefit teachers who teach introductory courses in Differential Calculus, assisting in the planning of teaching activities.

**Keywords:** *Achievements*; Transitions; Theoretical Model; Derivatives.

---

<sup>1</sup> Instituto Federal do Sertão Pernambucano | josenilsonlola@gmail.com

<sup>2</sup> Universidade Federal da Bahia | joneicerqueira@gmail.com

## Introdução

O presente estudo se insere em uma agenda de pesquisas na área de Educação Matemática que tem por objetivo problematizar as diferentes formas de comunicar um conceito matemático (Giraldo *et al.*, 2015; Park, 2015; Coutinho; Barbosa, 2018; Santos; Barbosa, 2019; Haghjoo; Radmehr; Reyhani, 2023). Um conceito, segundo Sfard (2008), é constituído de todas as possíveis *realizações* que estejam, ou possam estar associadas a uma palavra específica. Já as *realizações*, são as diferentes formas de comunicar tal conceito, o que inclui a fala, a escrita, os símbolos, os ícones, os gestos ou os materiais concretos (Sfard, 2008).

Este estudo é centrado no conceito de derivada, seguindo a perspectiva de Sfard (2008). Desse ponto de vista, o conceito de derivada é constituído por todas as *realizações* que guardam relação com a palavra derivada e podem ser comunicadas como taxa de variação, inclinação da reta tangente, derivada como limite, reta secante, dentre outras.

As formas como esse conceito vem sendo abordado em livros didáticos, propostos para a formação de engenheiros em diferentes universidades chilenas, foram analisadas por Illanes e Breda (2023) e os resultados apontam uma ênfase no significado parcial da derivada como limite do quociente de incremento. O estudo revela ainda que a derivada pode ser comunicada, fazendo uso de representações gráficas, métodos algébricos, máximos e mínimos, derivada em um ponto etc. (Illanes; Breda, 2023).

Apesar da importância da derivada e de suas aplicações, muitos estudantes universitários possuem apenas uma compreensão instrumental desse conceito (Illanes; Breda, 2023). Isso ressalta a necessidade de explorar diversas estratégias para motivar a participação ativa dos alunos nas discussões matemáticas. A incorporação de exemplos práticos e a resolução de problemas podem tornar o conceito mais tangível e interessante para os estudantes (Haghjoo; Radmehr; Reyhani, 2023).

Esses estudos supracitados sugerem diferentes formas pelas quais o conceito de derivada de uma função pode ser comunicado no contexto educacional. Essa pluralidade na comunicação de um conceito fica evidente quando analisamos as *realizações* mobilizadas por professores de matemática (Menduni-Bortoloti; Barbosa, 2018). Esta matemática que possibilita o professor a estruturar situações de aprendizagem e habilita os discentes a estabelecerem conexões e compreenderem o que é comunicado nas aulas, pode ser descrita como uma Matemática para o Ensino (MpE) (Davis; Renert, 2014).

A Matemática para o Ensino é específica da ação do professor e ocorre a partir de sua participação em atividades comunicacionais, tais como: atividades de ensino, análise de livros didáticos e programas de formação continuada de professores. É o modo como o professor organiza situações de ensino, interpreta ações dos alunos e promove entendimentos da disciplina (Davis; Renert, 2014).

Diante da especificidade da ação do professor, Lopes e Scherer (2018) analisaram pesquisas desenvolvidas nos últimos onze anos e que tiveram por objetivo discutir o ensino dos conceitos de limites, derivadas e integrais que são usualmente abordados no primeiro curso de Cálculo Diferencial e Integral. Muitos desses estudos foram motivados pelos índices de reprovação e evasão. A partir disso, as autoras constataram que o uso de tecnologias digitais pode ajudar na superação de algumas dificuldades na aprendizagem do Cálculo (Lopes; Scherer, 2018).

As pesquisas desenvolvidas por Lopes e Scherer (2018), Illanes e Breda (2023) e Haghjoo, Radmehr e Reyhani (2023) indicam que a comunicação do conceito de derivada vem sendo discutida com base em diferentes referenciais teóricos, metodologias e recursos

didáticos. No entanto, nota-se uma carência de estudos que investiguem como ocorre a transição entre diferentes formas de comunicar esse conceito.

Considerando que um modelo teórico da Matemática para o Ensino de um conceito é uma estrutura teórica que organiza, em panoramas, as maneiras pelas quais a matemática é comunicada pelos professores em suas atividades educacionais (Santos; Barbosa, 2019), o presente estudo teve por objetivo identificar e caracterizar como os estudantes transitam entre os panoramas do Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada, proposto por Lola e Barbosa (2024). Utilizamos a abordagem comunicacional de Sfard (2008) para descrever, analisar e categorizar as realizações empregadas pelos alunos na resolução de tarefas, identificando as estratégias mobilizadas na comunicação desse conceito.

Os baixos rendimentos, dificuldades na comunicação de conceitos matemáticos e a lacuna na literatura justificam a realização deste estudo. Considerando o exposto, na seção subsequente, discutiremos sobre o Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada, juntamente com a abordagem teórica desenvolvida pela pesquisadora Anna Sfard, que fundamenta esta investigação.

## Um modelo teórico da matemática para o ensino do conceito de derivada

O conceito de derivada é um dos temas que, usualmente, é trabalhado no primeiro curso de Cálculo Diferencial e Integral, também denominado de Cálculo 1. Essa disciplina contribui para o desenvolvimento científico de várias áreas, por isso, compõe o currículo de diversos cursos universitários, como, por exemplo, Engenharias, Física, Matemática, Administração, Ciências Contábeis, dentre outros (Lopes; Scherer, 2018; Rachelli; Bisognin, 2020).

Dada a sua importância, verifica-se que “o ensino e a aprendizagem de Cálculo é uma preocupação que se prolonga por décadas” (Lopes; Scherer, 2018, p. 145) e vem influenciado o desenvolvimento de estudos que procuram investigar o processo de ensino, buscando discutir como professores mobilizam os conhecimentos matemáticos e pedagógicos que são revelados nas reflexões coletivas ocorridas em um contexto formativo e utilizados para comunicar um conceito.

Nessa direção, analisando a participação do professor em atividades de natureza comunicacional, tais como: pesquisas em Educação Matemática, atividades de ensino, análise de livros didáticos e cursos de formação continuada, é possível identificar a especificidade de como os professores organizam suas tarefas de ensino e como comunicam esses conhecimentos em suas atividades (Davis; Renert, 2014).

Impulsionados por estas reflexões, pesquisadores argumentam que o professor possui uma singularidade ao comunicar um conceito matemático, distinguindo-se dos demais profissionais que empregam a matemática em suas atividades que não estão relacionadas ao ensino, a exemplo de engenheiros e matemáticos (Ball; Thames; Phelps, 2008; Davis; Renert, 2014). Essa forma de abordagem tem como uma das denominações: Matemática para o Ensino (tradução livre de: *Mathematics for Teaching*) (Davis; Renert, 2009).

A Matemática para o Ensino é vasta, possui natureza dinâmica e em constante evolução, emerge do planejamento de materiais curriculares, dos cursos de formação de professores, constituindo-se nos conhecimentos matemáticos empregados pelo professor ao desenvolver sua tarefa de ensino. A experiência e o envolvimento dos participantes são

determinantes, gerando-se a partir da troca de suas interações mútuas (Davis; Renert, 2014). Os mesmos autores argumentam que o conhecimento pessoal e coletivo é compartilhado e disseminado à medida que professores e pesquisadores colaboram e trocam informações.

Na literatura, pesquisadores discutem os conceitos que são trabalhados no primeiro Curso de Cálculo Diferencial e Integral utilizando diferentes lentes teóricas. A atualidade e a continuidade desses estudos se justificam, dentre outros, pelos relatos das dificuldades enfrentadas por alunos nessa área do conhecimento (Nasser; Sousa; Torraca, 2017; Trevisan, Mendes, 2017; Pino-Fan; Godino; Font, 2015). A fragilidade na comunicação da derivada pode estar relacionada à complexidade do conceito (Haghjoo; Radmehr; Reyhani, 2023). Essas dificuldades podem refletir em altos índices de reprovação e evasão (Souza; Fonseca, 2017; Lopes; Scherer, 2018).

Pesquisadores chamam a atenção para o alto índice de reprovação nas Instituições de Ensino Superior (IES), e apontam que alguns estudantes apresentam dificuldades na análise, interpretação gráfica, definições conceituais e dificuldades em relacionar limites e derivadas com outros conceitos matemáticos (Lopes; Scherer, 2018; Souza; Fonseca, 2017; Trevisan; Mendes, 2017).

Para Souza e Fonseca (2017), as reprovações podem estar relacionadas à compreensão de conceitos e ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Os mesmos autores afirmam que as dificuldades podem ser associadas às questões ligadas à abstração excessiva de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e metodologias utilizadas no processo de ensino.

As pesquisas realizadas por Macêdo, Santos e Lopes (2020) discutem as potencialidades dos recursos tecnológicos na comunicação do conceito de derivadas, e argumentam que o *software* GeoGebra possibilita a visualização, das relações existentes entre a função, o seu gráfico e a reta tangente. A perspectiva dinâmica do *software* também possibilita desenvolver cálculos algébricos e geométricos, mostrando relações entre uma função e sua derivada por meio de medidores visuais (Zengin, 2018).

Diante da pluralidade na comunicação do conceito de derivada, Lola e Barbosa (2024) analisaram artigos publicados em periódicos da Educação Matemática. O objetivo foi identificar, estruturar e sintetizar as diferentes *realizações* do conceito de derivada, afim de construir um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino. Neste modelo, as *realizações* foram categorizadas em seis panoramas: Definição formal, Gráfico, Reta tangente a uma curva, Função derivada, Regras de derivação e Aplicações das derivadas.

Nessa perspectiva, Lola e Barbosa (2024) descrevem os panoramas do seguinte modo:

- O panorama Definição formal é constituído de diferentes *realizações* empregadas para comunicar a definição formal da derivada de uma função;
- No panorama Gráfico foram inseridas *realizações* que se manifestam como *mediadores visuais* utilizados para representar graficamente a derivada de uma função e suas relações com a inclinação de uma reta tangente; As *realizações* que descrevem as relações existentes entre o limite das retas secantes, a reta tangente em um ponto específico e a derivada de uma função foram agrupadas no panorama reta tangente a uma curva. Para Park (2015), a derivada de uma função em um ponto é definida como o limite das taxas de variação média, que são representadas pelas retas secantes. Já as *realizações* que descrevem as características da derivada de uma função, como crescimento, decrescimento, concavidade e pontos de Máximo e Mínimo local foram sintetizadas no panorama Função Derivada;
- No panorama Regras de derivação, foram agrupadas as *realizações* que apresentam as ações dos participantes quando comunicam um conceito, as quais Sfard (2008)

denomina de *rotinas*. Estas, foram utilizadas para comunicar técnicas de derivação de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, compostas, produto e quociente de funções;

- As *realizações* inseridas no panorama intitulado Aplicações das derivadas são comunicadas de forma associada aos demais panoramas e formam registradas durante a aplicação desse conceito em diferentes áreas das ciências. Esse panorama destaca a importância do conceito de derivada como ferramenta matemática fundamental que pode ser utilizada na resolução de tarefas práticas e teóricas em campos como a Física, Química, Biologia, Economia e Engenharia;

As diferentes formas de comunicar o conceito de derivada, apresentadas por Lola e Barbosa (2024), podem ser representadas por meio da Figura 1 abaixo.

Figura 1: Um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada



Fonte: Autores (2024)

Os autores descrevem que os panoramas constituem o conceito de derivada e podem ser interconectados, mas não apresentam uma dependência hierárquica entre si, podendo ser articulados de forma flexível, conforme os objetivos do ensino.

A comunicação de conceitos, na perspectiva de Sfard (2008), ocorre na participação em atividades coletivas e organizadas do discurso. Nesse contexto, discurso é considerado uma forma bem definida de comunicação, compreendido pela autora como qualquer ação comunicativa dentro de um determinado contexto social. A matemática é vista como uma forma bem definida de comunicação, ou seja, um tipo de discurso (Sfard, 2008) que possui características distintas, pois as palavras se tornam significativas em diferentes contextos, expressando o que Sfard (2008) denomina de *realizações*.

No discurso matemático, os conceitos, geralmente, são compreendidos por meio da participação em atividades coletivas de natureza comunicacional. O termo discurso está relacionado com a comunicação, logo comunicar-se matematicamente, de forma clara e precisa, implica tornar-se apto a fazer uma comunicação consigo mesmo e também com os

outros. Sendo concebida como um tipo de discurso, a compreensão matemática é caracterizada como um processo de mudança de discurso (Sfard, 2008).

O discurso matemático é evidenciado por meio do uso de *palavras*, *mediadores visuais*, *narrativas endossadas* e a aplicação de *rotinas* próprias (Sfard, 2008). No ensino das derivadas, as palavras são utilizadas para descrever uma *realização* de maneira verbal, por exemplo, inclinação da reta tangente. Para Sfard (2008), os *mediadores visuais* são importantes ferramentas utilizadas na comunicação, a exemplo, gráficos, notações algébricas, operadores aritméticos, dentre outros. Esses mediadores são fundamentais na comunicação da interpretação geométrica da derivada de uma função.

As *rotinas*, para Sfard (2008) são atividades ordenadas em que os participantes do discurso utilizam *palavras* e *mediadores visuais* para resolver problemas matemáticos. O principal propósito das *rotinas* matemáticas é criar narrativas sobre objetos matemáticos que possam ser validadas por especialistas da comunidade discursiva a qual essa *rotina* pertence (Sfard, 2008). Na comunicação do conceito de derivada se configuram como procedimentos ou estratégias mobilizadas para derivar funções reais de uma variável, solucionar tarefas de aplicações das derivadas, dentre outros.

*Narrativas endossadas* (Sfard, 2008) referem-se às sequências de expressões verbais que são organizadas para descrever objetos, suas relações e os processos de construção desses objetos. Tais narrativas são submetidas a avaliação e podem ser aceitas ou rejeitadas pela comunidade que participa do mesmo discurso. São utilizadas em atividades que buscam definir, demonstrar, calcular, fazendo uso de definições, axiomas e teoremas, como, por exemplo, o Teorema de Rolle<sup>3</sup>.

No discurso sobre derivadas, entendemos que as *palavras* e os *mediadores visuais* são ferramentas mobilizadas na comunicação. As *rotinas* constituem os processos e as *narrativas endossadas* representam os resultados, que estão sujeitos a aprovação da comunidade que participa do discurso sobre derivadas. A validação dos resultados depende de regras bem definidas, que regulam e garantem a produção discursiva.

O discurso matemático está condicionado às *regras ao nível do objeto* e às *metarregras*. *Regras ao nível do objeto* são definidas como narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso (Sfard, 2008) e que fazem referência às propriedades dos objetos matemáticos. Estão relacionadas à capacidade de usar um conceito em diferentes contextos ou situações. A exemplo, destacamos as regras empregadas para derivar funções trigonométricas, exponenciais, polinomiais, compostas, produto e quociente de funções.

As *metarregras* regulam o uso das *rotinas* que “definem padrões na atividade dos discursantes ao tentar produzir e substancializar *narrativas no nível do objeto*” (Sfard, 2008, p. 201, tradução nossa). Elas governam o uso das regras matemáticas. Por meio delas, é possível descrever as ações dos participantes ao aplicarem ou modificarem regras na comunicação de um conceito. Por exemplo, entender quando e como utilizar a derivada do quociente de funções em vez da derivada do produto em um problema matemático constitui um exemplo de aplicação de *metarregras*.

---

<sup>3</sup> Teorema de Rolle: dada uma função contínua  $f$  definida em um intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ , se  $f(a) = f(b)$ , então existe algum ponto “ $c$ ” em  $(a, b)$  onde a tangente ao gráfico de  $f$  é horizontal, isto é,  $f'(c) = 0$ .



Sfard (2008) argumenta que compreender as *regras ao nível do objeto* e as *metarregras* é fundamental para entender como o discurso matemático é desenvolvido e aplicado. Elas fundamentam a comunicação matemática, permitindo aos alunos não apenas aplicar conceitos, mas também, compreender como e por que esses conceitos funcionam em diferentes contextos. Nesse processo, Sfard (2008) enfatiza a importância das interações sociais, da linguagem e da comunicação.

Diante do exposto, este estudo teve por objetivo identificar e caracterizar como os estudantes transitam entre os panoramas do Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada, proposto por Lola e Barbosa (2024).

## Procedimentos metodológicos

Na perspectiva de identificar e caracterizar as *realizações* mobilizadas pelos estudantes na transição entre os panoramas do Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada, proposto por Lola e Barbosa (2024), começamos a coletar dados por meio atividades escritas e gravações em áudio e vídeo das discussões em sala de aula.

Diante do objetivo do estudo, apoiamos-nos em uma abordagem qualitativa (Creswell, 2012) e aplicamos tarefas sobre o conceito de derivada em uma turma composta por doze estudantes, matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Licenciatura em Química do Instituto Federal do Sertão Pernambucano. A determinação do local da pesquisa foi influenciada pela facilidade de acesso à instituição, aos estudantes e pelos recursos disponíveis, incluindo equipamentos e infraestrutura, uma vez que corresponde ao local de trabalho do primeiro autor desse estudo. Quanto aos participantes, foram convidados todos os alunos que estavam matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ofertada no semestre 2022.2.

No primeiro encontro, apresentamos a proposta de pesquisa para a turma e discutimos as etapas e os procedimentos que seriam adotados. Informamos que a participação era voluntária e que a confidencialidade e a privacidade das informações seriam garantidas. A pesquisa foi conduzida obedecendo os parâmetros éticos descritos na autodeclaração (Mainardes; Carvalho, 2019), a partir da qual foram explicitados os princípios, as abordagens e as demais questões éticas que permeiam o desenvolvimento do estudo. Após os esclarecimentos, os alunos foram convidados a assinar o termo de consentimento informado livre e esclarecido (Mainardes; Carvalho, 2019).

Os encontros eram semanais e durante a execução das tarefas, o primeiro autor desempenhou o papel de professor da disciplina e pesquisador. Com a ajuda de um assistente de pesquisa, foram coletados dados ao longo de 14 horas-aula, com duração de 45 minutos cada, realizadas no período noturno. Ao término, aproximadamente 10 horas de gravação foram registradas. Confeccionamos um diário de campo, no qual registramos uma variedade de informações, percepções e *insights* identificados a cada seção.

Os alunos formaram equipes e passaram a examinar, debater e produzir soluções para as questões propostas. A cada encontro, fizemos rodízios dos alunos entre as diferentes equipes, garantindo assim, uma heterogeneidade de *realizações*. Nesse processo, utilizamos o Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada (Lola; Barbosa, 2024) como ferramenta analítica. Esse modelo nos ofereceu diretrizes e reflexões sobre como abordar o conceito em sala de aula, bem como sobre a seleção do material didático necessário para que os alunos pudessem transitar entre os panoramas: Definição formal,

Gráfico, Reta tangente a uma curva, Função derivada, Regras de derivação e Aplicações das derivadas.

À luz das definições teóricas de Sfard (2008), procedemos a seleção e a análise dos dados, com foco no objetivo do estudo. Inicialmente, avaliamos as filmagens, selecionando e transcrevendo trechos representativos que caracterizam como ocorreram as transições entre os panoramas do modelo teórico. A interpretação foi elaborada a partir da análise desses extratos das narrativas, os quais denominamos de episódios. Esses episódios desempenharam um papel fundamental na análise das narrativas e foram então utilizados como exemplos para questionar os discursos empregados, permitindo-nos caracterizar o contexto, as percepções e as intenções subjacentes às ações descritas.

Na perspectiva de fundamentar a problemática que se constrói neste estudo, apresentamos a seguir extratos das transições entre os panoramas do conceito de derivada que foram selecionados a partir da análise das gravações, diário de campo e material escrito produzido pelos participantes do estudo.

## Apresentação e análise dos dados

Buscando preservar o anonimato dos participantes do estudo, cada indivíduo recebeu um nome fictício. Seguindo essa premissa, as tarefas foram apresentadas e algumas das *realizações* produzidas foram descritas, visando identificar e caracterizar como ocorreram as transições entre os panoramas do Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada (Lola; Barbosa, 2024).

Destacamos que nos concentramos exclusivamente em funções reais com variável real, que são deriváveis em um intervalo aberto. Logo após analisarmos o material produzido durante a execução das tarefas, selecionamos *realizações* que indicam que as transições ocorreram com os seguintes propósitos: Confirmação, Verificação e Instrumental. Passamos então, a descrevê-las.

### Transição para confirmação

No episódio a seguir, reunimos *realizações* que demonstram como os alunos transitam entre os panoramas do Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada em busca de confirmação de suas ideias. Esse episódio foi capturado durante a discussão sobre a primeira questão: *Dada a função polinomial definida por  $f(x) = 4x - x^2$ . Verificar se a função possui pontos de máximo e mínimo relativos.*

(1) Cleber: Não lembro como faz.

(2) Jorge: Eu derivei e construir o gráfico, o ponto é de máximo.

(3) Pedro: Não entendi. Por que de máximo?

(4) Jorge: É só derivar e igualar a zero. Em  $x = 2$ , o ponto é de máximo, porque a parábola tem concavidade para baixo.

Analisando os extratos (2) e (4), percebemos que Jorge utilizou *rotinas* de derivação e a construção gráfica para comunicar suas compreensões relativas à primeira questão. Essas *realizações* indicam uma transição entre duas formas de comunicação, pertencentes aos panoramas de Função derivada e Gráfico. A transição não apenas serviu para confirmar as



ideias apresentadas, mas também, demonstrou a sua capacidade de utilizar diferentes *realizações* para justificar seu entendimento.

O panorama gráfico foi mobilizado como ferramenta visual que ajudou na interpretação e na visualização do ponto de máximo relativo, reforçando a importância do uso de diferentes *realizações* para apresentar o conceito de derivada. Nesse sentido, Sfard (2008) destaca que a conexão entre diferentes repertórios mobilizados facilita a comunicação de um conceito matemático, promove uma compreensão mais abrangente e pode contribuir para a inserção de discursantes, menos experientes, na comunidade discursiva.

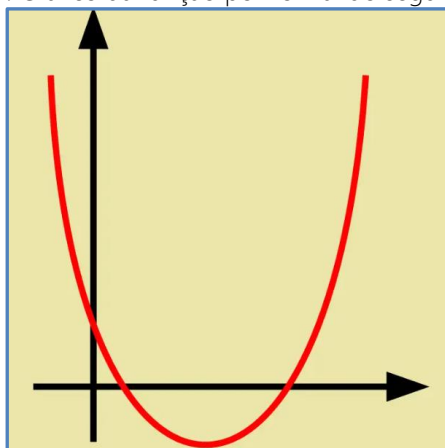
Nesse contexto, observa-se que a transição para confirmação ocorre quando os interlocutores discutem um conceito e/ou resolvem uma tarefa utilizando diferentes *palavras, metarregras e mediadores visuais* para validar suas conclusões, conforme observado nas narrativas apresentadas pelo aluno Jorge (4). Normalmente, essa transição se dá quando há incertezas, como no extrato “*Não entendi. Por que de máximo?*”, ou quando o discursante quer assegurar que suas *realizações* estão corretas. Ao afirmar “*Eu derivei e construir o gráfico, o ponto é de máximo*”, Jorge transita entre os panoramas Regras de derivação e o Gráfico, buscando confirmar se suas ideias estão alinhadas com *narrativas endossadas* sobre o conceito de derivada.

A associação do panorama Gráfico com o discurso oral apresentado por Jorge reflete as ideias defendidas por pesquisadores como Illanes e Breda (2023), que enfatizam a importância de integrar diferentes repertórios, como gráficos e métodos algébricos, na comunicação de conceitos matemáticos. Segundo Sfard (2008), essa integração de diferentes *realizações* pode incentivar a participação de alunos menos experientes nas discussões matemáticas, possibilitando a construção de significados e contribuindo para o desenvolvimento discursivo dos estudantes.

## Transição para verificação

Nesta seção, apresentamos *realizações* que ilustram diferentes estratégias mobilizadas pelos alunos para comunicar o conceito de derivada. Destacamos uma discussão em que os interlocutores empregaram *metarregras* diversas para explorar e expor suas respostas. Essas estratégias foram identificadas durante a análise da segunda questão: *Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função polinomial derivável, com uma variável real, cujo gráfico está representado a seguir. Esboce o gráfico da função derivada e justifique sua resposta.*

Figura 2: Gráfico da função polinomial do segundo grau



Fonte: Autores (2024)

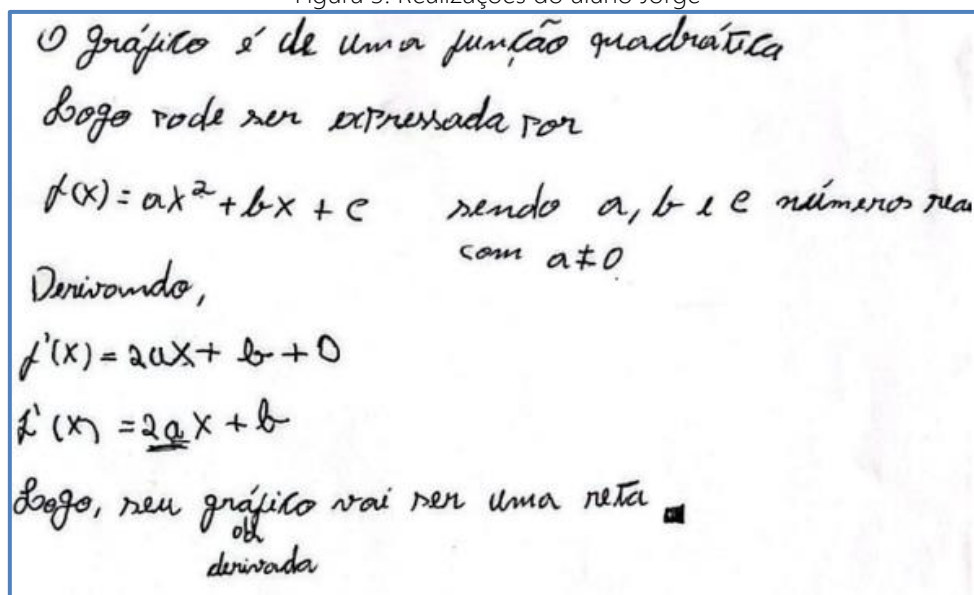
Após as filmagens, as narrativas produzidas foram transcritas e selecionamos, para análise, somente os trechos que atendem o objetivo proposto na segunda questão, conforme destacamos no episódio descrito abaixo:

(5) Carlos: Se a função é polinomial do segundo grau, então o gráfico da derivada será uma parábola!

(6) Pesquisador: Que tipo de função polinomial tem como gráfico uma parábola com concavidade para cima?

(7) Jorge: Pelo gráfico, sei que a função é do segundo grau, logo o gráfico da derivada vai ser uma reta.

Figura 3: Realizações do aluno Jorge



Fonte: Material produzido pelos participantes da pesquisa (2024)

A análise das gravações e material coletado nos permitiu identificar momentos em que a transição entre os panoramas do modelo teórico ocorreu com o propósito de verificação. Um exemplo claro disso, é o diálogo entre o pesquisador e os alunos Carlos (5) e Jorge (7). Mediante uma afirmação equivocada do aluno Carlos (5), fizemos um questionamento, conforme indicado no item (6). Imediatamente, Jorge argumentou que por se tratar de uma função polinomial do segundo grau, o gráfico da função derivada é uma reta. Para confirmar sua resposta, Jorge escreveu a expressão da função quadrática e, na sequência, a derivou chegando a uma função polinomial do primeiro grau, cujo gráfico representa uma reta.

As realizações apresentadas por Jorge não apenas corrigiram o equívoco de Carlos, mas também, exemplificaram *rotinas* de derivação, reforçando o entendimento sobre como as funções e seus respectivos gráficos, em geral, são distintos, quando derivadas. O episódio mostra que, inicialmente, ocorreu uma transição entre os panoramas Regras de derivação e Função derivada. Em seguida, observou-se uma transição para o panorama Gráfico, com o propósito de verificar as ideias apresentadas.

Nesse episódio, foi inicialmente apresentado um gráfico da função polinomial do segundo grau, e eles foram solicitados a esboçar o gráfico da função derivada. Carlos afirmou: "Se a função é polinomial do segundo grau, então, o gráfico da derivada será uma parábola!". Essa resposta equivocada evidencia que, provavelmente, Carlos não participa

ativamente do discurso referente aos panoramas Regras de derivação e o Gráfico. A dificuldade em transitar entre essas formas de comunicação sugere uma limitação em verificar e validar suas ideias.

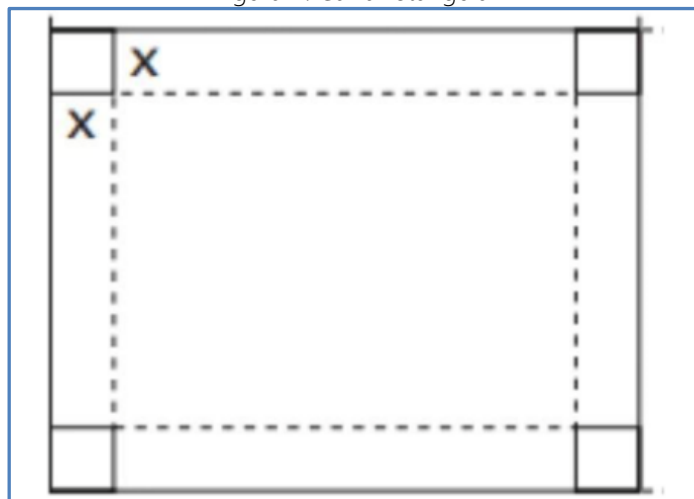
Na sequência, Jorge narra que *"Pelo gráfico, sei que a função é do segundo grau, logo o gráfico da derivada vai ser uma reta,"* e utiliza discurso algébrico para que todos possam verificar suas realizações. Essas narrativas não apenas evidenciam a compreensão do conceito, mas também, destaca a importância de uma abordagem integrada que promova uma transição efetiva entre diferentes formas de comunicação, pertencentes aos panoramas de Regras de derivação, Função derivada e o Gráfico.

Diante do exposto, concluímos que a transição para verificação ocorre quando os interlocutores mobilizam gráficos, definições e/ou rotinas matemáticas para validar seus entendimentos sobre um conceito. Nesse contexto, Oliveira e Gonçalves (2019) destacam a importância de o professor articular diversas maneiras de comunicar as derivadas, seja de forma visual e intuitiva, por meio de gráficos, animações, dentre outras representações, para auxiliar os alunos na construção do conhecimento.

### Transição instrumental

Nesta seção, apresentamos um episódio em que os alunos mobilizaram o panorama Regras de derivação como instrumento para resolver um problema de aplicação de derivadas. As discussões foram registradas durante a resolução da terceira questão: *Uma caixa aberta deve ser feita com uma folha de papelão medindo 8 cm de largura por 15 cm de comprimento, cortando-se quadrados iguais dos 4 cantos e dobrando-se os lados. Qual é o tamanho dos quadrados cortados para a obtenção de uma caixa com o máximo volume?*

Figura 4: Caixa retangular



Fonte: Autores (2024)

Após um tempo inicial reservado para que os grupos discutissem estratégias de resolução, passamos a socializar os resultados construídos, conforme descrito abaixo.

(8) Cleber: Não sei por onde começar? Onde vou utilizar a derivada nessa questão?

(9) Pesquisador: Nessa questão, vamos aplicar os conceitos de Máximo e Mínimo!

(10) Jessé: Não tenho certeza se está certo, mas nós chegamos a essa solução!

Figura 5: Realizações do aluno Jessé

$A = 2 \cdot C$   
 $A = 8 \cdot 15 - 4x^2$

$V = (120 - 4x^2) \cdot x$   
 $V = 120x - 4x^3$   
 máximo  
 $V' = 0$   
 $-12x^2 + 120 = 0$   
 $-12x^2 = -120$   
 $12x^2 = 120$   
 $x^2 = 10$   
 $x = \sqrt{10}$

Fonte: Material produzido pelos participantes da pesquisa (2024)

Analisando o extrato (8), fica evidente que Cleber não conseguiu relacionar os conceitos de Máximo e Mínimo com o discurso sobre geometria para comunicar uma solução para a tarefa. Nesse instante, as expressões faciais e movimentos corporais dos alunos refletiam perplexidade e inquietude, indicando dificuldades em relacionar conceitos teóricos com aplicação prática. Na perspectiva de Sfard (2008), uma comunicação clara e precisa de conceitos e o entendimento de como o discurso matemático é desenvolvido requer, além do uso correto de *palavras*, *mediadores visuais*, *narrativas* endossadas e a aplicação de *rotinas* próprias, a compreensão das *regras do nível do objeto* e das *metarreglas*.

Já as *realizações* apresentadas por Jessé (Figura 5), constata-se um entendimento sobre os conceitos de Máximo, Mínimo e regras de derivação. No entanto, é possível identificar uma interpretação equivocada, especialmente do ponto de vista geométrico, o que resulta em uma lacuna na conexão entre os discursos geométrico e algébrico. Embora Jessé demonstre competência nas *rotinas* algébricas, a falta de uma compreensão clara e estruturada dos fundamentos geométricos pode limitar sua capacidade de visualizar e interpretar adequadamente as relações espaciais e as representações gráficas.

Essa lacuna ocasionou uma transição incerta entre os panoramas Aplicações das derivadas e Regras de derivação, evidenciando a necessidade de atividades que fortaleçam a compreensão de conceitos geométricos. Nesse contexto, Sfard (2008) salienta que a resolução de problemas pode contribuir para auxiliar os alunos a desenvolverem *narrativas endossáveis*, contribuindo para uma compreensão dos conceitos matemáticos.

A transição instrumental do conceito de derivada ocorre quando os alunos recorrem a um panorama para encontrar as ferramentas necessárias para resolver tarefas ou aplicar conceitos relacionadas a outro panorama. Esse tipo de transição, geralmente, envolve a

aplicação do panorama Regras de derivação a problemas do cotidiano, como ilustrado nas realizações do aluno Jessé (Figura 5).

Embora Jessé não tenha demonstrado total entendimento da questão 3, conforme se observa na narrativa "*Não tenho certeza se está certo, mas nós chegamos a essa solução!*", observa-se que ele recorreu às *rotinas* de derivação como instrumento para tentar resolver o problema. Mesmo diante da incerteza, Jessé demonstrou iniciativa reforçando a importância da inserção de atividades que estimulem a participação ativa dos estudantes. Inspirados em Sfard (2016), acreditamos que a utilização de diferentes *realizações* possibilita o entendimento de conceitos e promove uma participação exploratória no discurso matemático.

## Considerações finais

Inspirados em Sfard (2008), reconhecemos que as interações discursivas são primordiais no processo de comunicação de conceitos matemáticos. Nesse sentido, implementamos uma série de atividades com o objetivo de identificar e caracterizar como os estudantes transitam entre os panoramas do Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada. Durante a pesquisa, os alunos foram incentivados a compartilhar suas *realizações*. A partir disso, os dados produzidos revelaram que essas transições ocorreram com o propósito de Confirmação, Verificação e Instrumental.

Enquanto na transição para Confirmação, diferentes *realizações* são utilizadas para confirmar ideias e/ou estratégias na resolução de tarefas, a transição para Verificação tem o propósito de validar os entendimentos sobre a comunicação do conceito de derivada. A identificação e a caracterização dessas transições permitem verificar se os alunos compreendem o conceito e conseguem conectar suas aplicações em variados contextos.

A transição Instrumental, por sua vez, foi observada quando os alunos buscavam em um panorama as ferramentas necessárias para resolver tarefas ou aplicar conceitos relacionadas a outro panorama do Modelo Teórico. Por exemplo, mobilizar o panorama Regras de derivação para revolver problemas do panorama Aplicações das derivadas, ou utilizar o panorama Gráfico para entender o comportamento do Panorama Função derivada.

Diante do exposto, entendemos que os panoramas constituem o conceito de derivada (Lola; Barbosa, 2024) e a transição entre estes ocorre por meio do uso de *palavras, mediadores visuais, rotinas e narrativas endossadas*, cujas comunicações estão condicionadas às regras do discurso matemático, especificamente as *Regras ao nível do objeto* e *Metarregras*, conforme Sfard (2008).

Estudos em Educação Matemática indicam que o conceito de derivada tem sido ensinado utilizando diferentes ferramentas, como representações gráficas, métodos algébricos (Illanes; Breda, 2023), tecnologias digitais (Lopes; Scherer, 2018; Macêdo; Santos; Lopes, 2020), tarefas investigativas e resolução de problemas (Haghjoo; Radmehr; Reyhani, 2023). Entretanto, observa-se que muitos estudantes apresentam dificuldades nessa área do conhecimento (Nasser; Sousa; Torracca, 2017), apresentando uma compreensão limitada do conceito (Illanes; Breda, 2023), o que resulta em altos índices de reprovação e evasão (Lopes; Scherer, 2018).

Nesse contexto, identificar e caracterizar as formas como os alunos realizam essas transições pode facilitar a integração de novos alunos e contribuir para o desenvolvimento do discurso sobre derivada. Além disso, pode ajudar no desenvolvimento de habilidades e

competências necessárias para aplicar definições formais, gráficos e regras de derivação na resolução de tarefas em diferentes contextos.

Os resultados deste estudo podem favorecer professores que ministram disciplinas introdutórias de Cálculo Diferencial, pois a compreensão das transições entre panoramas pode auxiliar no planejamento de atividades que incentivem discussões coletivas sobre diferentes métodos de comunicação, promovendo assim, uma compreensão abrangente do conceito de derivada de uma função.

Durante a coleta de dados, alguns fatores limitaram o desenvolvimento da pesquisa. Primeiramente, alguns alunos demonstraram constrangimento diante dos equipamentos de filmagem, o que resultou em uma participação reduzida nas discussões. Além disso, houve casos em que os estudantes se expressavam em volume muito baixo, o que dificultou tanto a escuta quanto a transcrição das gravações. Outro aspecto relevante foi a limitação de tempo para registrar a variabilidade discursiva associada à comunicação do conceito de derivada.

No entanto, o principal fator limitante esteve relacionado ao acúmulo das funções de professor e pesquisador ao mesmo tempo. Enquanto professor, minha responsabilidade era conduzir o processo de ensino; como pesquisador, cabia-me observar e coletar dados de forma imparcial. Conciliar essas duas funções revelou-se um desafio significativo, sobretudo em momentos em que a postura neutra exigida pela pesquisa entrava em conflito com a necessidade de intervenção pedagógica para incentivar a participação dos alunos nas discussões sobre o conceito de derivada. O grande desafio foi assegurar que a atuação como pesquisador não interferisse negativamente no andamento das atividades, permitindo que ambas as funções fossem exercidas de maneira eficaz.

## Referências

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

COUTINHO, Jean Lázaro da Encarnação; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelo de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Combinação Simples. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 53, p. 46-67, 2018.

CRESWELL, John W. *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. 4. ed. Boston: Pearson, 2012.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*, Canadá, v. 29, n. 3, p. 37- 43, 2009.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. *The math teachers know: Profound understanding of emergente mathematics*. New York: Editorial Routledge, 2014.

GIRALDO, Victor *et al.* Matemática Elementar e Investigação de Conceito: Estabelecendo Relações. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IV., Pirenópolis, 2015, *Anais...* v. 1, 2015.

HAGHJOO, Saeid, RADMEHR, Farzad; REYHANI, Ebrahim. Analyzing the written discourse in calculus textbooks over 42 years: the case of primary objects, concrete discursive objects, and a realization tree of the derivative at a point. *Educational Studies in Mathematics*, v. 113, n. 1, p. 73-102, 2023. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10168-y>.



ILLANES, Maritza Katherine Galindo; BREDÁ, Adriana. Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema*, Rio Claro, v. 37, n. 75, p. 271-295, abr. 2023.

LOLA, Josenilson Lopes; BARBOSA, Jonei Cerqueira. *Um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada*. 2024. (No prelo).

LOPES, Vanessa Rodrigues; SCHERER, Suely. Cálculo Diferencial e Integral e o Uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação: uma Discussão de Pesquisas nos Últimos Onze Anos. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, Londrina, v. 11, n. 2, p. 145-159, 2018. <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2018v11n2p145-159>.

MACÊDO, Josué Antunes de; SANTOS, Anna Clara Lopes dos; LOPES, Lailson dos Reis Pereira. Contributions of using GeoGebra software in the study of the derivative. *Research, Society and Development*, [S. l.], v. 9, n. 3, p. e156932611, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i3.2611. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/2611>. Acesso em: 18 ago. 2022.

MAINARDES, Jefferson; CARVALHO, Isabel Cristina de Moura. Autodeclaração de princípios e de procedimentos éticos na pesquisa em Educação. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO (ANPED): Ética e pesquisa em Educação: subsídios, 2019, v. 1. Rio de Janeiro: ANPED, 2019. 133 p.

MENDUNI-BORTOLOTTI, Roberta D'Angela; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito. *Educação Matemática Pesquisa: Revista Do Programa De Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, São Paulo, v. 20, n. 1, p. 269-293, 2018. DOI: 10.23925/1983-3156.2018v20i1p269-293. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/27322>. Acesso em: 02 ago. 2022.

NASSER, Lilian; SOUSA, Geneci Alves de; TORRACA, Marcelo André A. Desempenho em cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior. *Boletim GEPEM*. n. 70, p. 43-55, 2017.

OLIVEIRA, Ricardo Augusto de; GONÇALVES, William Vieira. O uso do software GeoGebra no ensino de derivada na formação inicial de professores de matemática: um mapeamento de suas publicações. *Revista Thema*, Pelotas, v. 16, n. 2, p. 331-345, 2019. DOI: 10.15536/thema.V16.2019.331-345.1123. Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1123>. Acesso em: 21 ago. 2024.

PARK, Jungeun. Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, v. 91, n. 3, dez. 2015.

PINO-FAN, Luis R.; GODINO, Juan D.; FONT, Vicenç. Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. *Bolema*, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, abr. 2015.

RACHELLI, Janice; BISOGNIN, Vanilde. Derivadas Parciais: um Estudo com Base na Teoria APOS. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, v. 13, n. 1, p. 26-34, 2020. <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n1p26-34>.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de Artigos Científicos. *Boletim GEPEM*, n. 74, p. 127-143, 2019.

SFARD, Anna. On the need for theory of mathematics learning and the promise of "commognition". In: TH INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 13., Resumos...ICME, Hamburg, p. 24-31, July, 2016.

SFARD, Anna. *Thinking as communicating*: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York, NY: Cambridge University Press, 2008.

SOUZA, Débora Vieira de; FONSECA, Rogério Ferreira da. Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e integral. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, São Paulo, v. 19, n. 1, 2017. DOI: 10.23925/1983-3156.2017v19i1p197-221. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26575>. Acesso em: 03 ago. 2021.

TREVISAN, André Luis; MENDES, Marcele Tavares. Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017.

ZENGİN, Yilmaz. Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. *Educational Studies in Mathematics*, v. 99, n. 3, p. 311-333, 2018. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9832-5>.