CONTRIBUIÇÕES DE MATEMÁTICOS FRANCESES PARA O DESENVOLVIMENTO DA FÍSICA[1]

Contributions of french mathematicians to the development of Physics

José Maria Filardo Bassalo[2]

RESUMO

Este artigo procura mostrar como os trabalhos de alguns matemáticos franceses foram importantes para o desenvolvimento da Física, em praticamente todos os seus ramos.

Palavras-chave: Matemáticos Franceses; Física

ABSTRACT

In this article we show how the works of the french mathematicians were important to the development of Physics, in almost all of its branches.

Keywords: French Mathematicians; Physics

ÓPTICA, GRAVITAÇÃO E DINÂMICA

Desde a Antiguidade, quando foram observados os primeiros fenômenos da refração da luz (desvio da luz ao passar na superfície de separação de dois meios refringentes), procurou-se explicar esse desvio por intermédio de uma expressão matemática. Depois de várias tentativas em busca dessa expressão, [1] somente em 1637, o filósofo e matemático francês René du Perron Descartes (1596-1650) em seu **La Dioptrique** ("A Dióptrica"), escrito como suplemento de seu famoso **Discours sur la Méthode**

[1] Este artigo **Homenageia** a Memória do escritor brasileiro Machado Coelho (1909-2001), um dos Fundadores da *Aliança Francesa de Belém*, detentor da **Cruz** *de Cavaleiro da Ordem das "Palmas Acadêmicas Francesas"*, e **Cavaleiro** da "*Ordem Nacional da Legião de Honra Francesa"* e **Anti-Homenageia** o famigerado ex-*Serviço Nacional de Investigação* (SNI) do Brasil, por haver-me impedido de realizar na França: Mestrado, Doutorado e Pós-Doutorado em Física.

[2] Doutor em Física pela Universidade de São Paulo, Brasil (1975). Professor Titular da Universidade Federal do Pará, Brasil. www.bassalo.com.br.

("Discurso sobre o Método"), apresentou o tratamento matemático correto daquele desvio. Nesse trabalho, demonstrou que as semicordas do dobro dos ângulos de incidência (i) e de refração (r) permanecem constantes quando a luz atravessa a superfície de separação de dois meios transparentes. Usando a teoria corpuscular da luz, concluiu que a velocidade da luz é maior nos meios mais refringentes (densos). Na linguagem moderna, esse resultado, conhecido como **Lei da Refração da Luz**, é traduzido pela expressão:

$$\text{sen } i/\text{sen } r = n_2/n_1,$$

com n_1 e n_2 representando, respectivamente, os índices de refração dos meios incidente e refratário. [2]

É também de Descartes, uma primeira tentativa de explicar o problema do movimento dos corpos próximos da Terra e dos astros no céu, problema esse conhecido desde a Antiguidade, e hoje chamado de gravitação. Vejamos como Descartes lidou com essa questão. Em 1644, publicou o livro intitulado **Principia Philosophiae** ("Princípios de Filosofia"), no qual formulou sua ***Teoria dos Vórtices*** para explicar a gravitação. Para a formulação de sua Teoria da Gravitação, Descartes considerou que a matéria, embora toda da mesma espécie, fosse constituída dos "elementos gregos" [1] que variavam de tamanhos: as maiores compunham a **terra**, as médias, o **ar**, e as menores, o **fogo**. Todos esses elementos eram agrupados em ***vórtices***, em cujo centro ficavam as partículas de **fogo**, que eram rápidas. Ainda para Descartes, no centro de cada ***vórtice*** formava-se uma estrela. As estrelas, contudo, tinham a tendência a se cobrir com matéria grossa para se constituir em um planeta; se, contudo, este tivesse uma excessiva massa que o fizesse vaguear de um ***vórtice*** para o outro, ele tornar-se-ia um cometa. Por fim, nesse **modelo cartesiano**, os planetas eram capturados e arrastados por ***vórtices*** (redemoinhos, turbilhões) de partículas de ***éter cartesiano*** (diferente do ***éter aristotélico***), em cujo centro estava o Sol; por sua vez, os satélites planetários eram velhos planetas formados há muito tempo. Segundo esse ***modelo turbilhonar cartesiano***, a Terra seria um elipsóide, alongado no sentido de seu eixo polar.

Por seu lado, em 1687, o físico e matemático inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) publicou o tratado intitulado **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** ("Princípios Matemáticos da Filosofia Natural"), composto de três livros. [3] No Livro I, Newton trata do movimento dos corpos no vácuo, inclusive dos movimentos orbitais elíptico, parabólico e hiperbólico, devido a forças centrais, ocasião em que demonstrou as ***Leis de Kepler***. Ainda nesse Livro I, e logo em seu começo, há a formulação das famosas três ***Leis de Newton****:* 1ª.) ***Lei da Inércia***; 2ª.) ***Lei da Força*** ($\vec{F} = m\vec{a}$); e 3ª.) ***Lei da Ação e Reação***. No Livro III, Newton apresentou a **Lei da Gravitação Universal** – *A gravidade opera proporcionalmente à quantidade de matéria e propaga sua virtude para todos os lados a distâncias imensas, decrescendo sempre como o inverso do quadrado da distância*. Com essa lei, encontrou a "estrutura do sistema do mundo" e, dentre as proposições demonstradas no Livro III, encontra-se o cálculo da forma da Terra: achatada nos pólos e alongada no equador, justamente o oposto do **modelo cartesiano**.

Essa polêmica sobre a forma da Terra só foi resolvida quando se mediu o meridiano terrestre e, para sua medição, houve a contribuição de matemáticos franceses. Com efeito, em 1736, Pierre Louis Moureau de Maupertuis (1698-1759), com auxílio de Aléxis Claude Clairaut (1713-1765), também astrônomo, confirmou o modelo newtoniano, ao medir o grau de arco de meridiano entre Tornea, no golfo de Botnia, e Kittis, situado no mesmo meridiano, além do círculo polar. O resultado dessa expedição foi publicado por Maupertuis, em 1737, no trabalho intitulado: **Relation du Voyage au Cercle Polaire** ("Relação da Viagem ao Círculo Polar"). Registre-se que essa medição, confirmou o resultado obtido, no ano anterior (1735), pelos franceses, o geógrafo Charles Marie de la Condamine (1701-1744) e o físico Pierre Bouguer (1698-1758), ao medirem o grau de arco do meridiano que passa em Quito, no Equador.

É interessante destacar que a ***Segunda Lei de Newton*** foi generalizada, em 1743, por Clairaut ao estudar o movimento de corpos em referenciais não-inerciais e demonstrar que: *Um corpo visto de um referencial em rotação (não-inercial) experimenta uma **força aparente** por unidade de massa, igual e de sentido contrário à aceleração que esse referencial tem em relação a um referencial inercial*. Esse estudo de Clairaut foi completado pelo físico francês Gustave Gaspard Coriolis (1792-1843), em 1829, ao obter a ***Segunda Lei de Newton*** para sistemas não-inerciais girantes [$\vec{\omega}$(t)]:

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a}(=\vec{F}) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m(d\vec{\omega}/dt)\times\vec{r}\ ,$$

onde o segundo e o terceiro termo representam a expressão geral, respectivamente, da ***força centrífuga*** [conceituada por Newton e calculada pelo físico e astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629-1695)] e da ***força de Coriolis***.

É oportuno destacar que o matemático francês Pierre Charles François Dupin (1784-1873), em 1817 (*Annales de Chimie et de Physique* **5**, p. 85), generalizou o Teorema demonstrado pelo físico francês Étienne Louis Malus (1775-1812), em 1808 (*Journal de l´École Polytechnique* **7**, p. 1), Teorema esse que foi importante para o desenvolvimento da Óptica Geométrica, principalmente no que se relaciona com a construção de imagens ópticas: - *Um grupo de ondas preserva sua congruência normal, após qualquer número de reflexões e refrações*. Registre-se que há congruência normal, se cada raio do grupo é cortado ortogonalmente por esferas centradas no ponto de intersecção desses raios. Em vista disso, esse Teorema passou a ser conhecido como **Teorema de Malus-Dupin**.

PRINCÍPIO VARIACIONAL: ÓPTICO E MECÂNICO

Outro tema importante para o desenvolvimento da Física relaciona-se com a proposta de um **Princípio Mínimo**, para o qual houve, também, a participação de matemáticos franceses. No começo da Era Cristã (d.C.), o matemático e inventor grego Heron de Alexandria (c.20 d.C.- ?) publicou o livro intitulado **Catóptrica**, onde formulou o seguinte princípio: [4] - *É mínimo o trajeto descrito por um raio luminoso*. Muito mais tarde, o físico e matemático iraquiano Abu-´Ali Al-Hasan ibn al-Haytham (al-Hazen) (c.965-1038) publicou, por volta de 1038, o livro **Kitab Al-Manazer** ("Tesouro da Óptica"), no qual redescobriu a "lei do trajeto mínimo da luz" de Heron. Contudo, foi somente em 1657 [em uma carta (*Epistolae* **42**) a Monsieur Cureau de la Chambre], que o matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) apresentou sua formulação matemática, por intermédio do **Princípio do Tempo Mínimo**: - *A Natureza sempre escolhe os menores caminhos*, segundo o qual a luz, ao se propagar entre dois pontos de sua trajetória, escolhe um caminho cujo tempo de percurso seja mínimo. Em notação atual, esse princípio significa dizer que:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} ds / v = \text{mínimo},$$

quando a luz viaja com a velocidade v entre os pontos P_1 e P_2 de sua trajetória. Registre-se que, em 1661, Fermat utilizou aquele seu **Princípio** para demonstrar a lei da refração cartesiana. Para realizar essa demonstração, formulou a hipótese de que as **resistências** (inverso da velocidade da luz) dos meios mais densos eram maiores que as dos meios menos densos; tal hipótese significava dizer que a velocidade da luz no meio mais denso (v_2) é menor do que no meio menos denso (v_1): $v_2 < v_1$, em frontal desacordo com a hipótese cartesiana referida acima. [5, 6] Note-se que essa hipótese de Fermat foi confirmada pelo físico e astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629-1695), em seu famoso **Traité de la Lumière** ("Tratado da Luz"), publicado em Paris, em 1690, com a hipótese de que a luz é uma onda. [7]

Ainda relacionado com um **Princípio Mínimo**, vejamos o que trata da seguinte questão: quando um corpo, com uma determinada velocidade, se desloca entre dois pontos de sua trajetória, qual o caminho que ele escolhe?. Para responder a essa pergunta, em 1744 (*Mémoires de l´Academie des Sciences de Paris*, p. 417), Maupertuis apresentou o conceito de **ação** (m v s), onde m é massa de um corpo que se desloca com velocidade v e percorrendo o espaço s, e que satisfaz o **Princípio de Mínima Ação**, traduzido pela expressão: m v s = mínimo. Registre-se que, ainda em 1744, no livro intitulado **Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimae Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti** ("Um Método de Descobrir Linhas Curvas que Apresentam a Propriedade de Máximo ou Mínimo ou a Solução do Problema Isoperimétrico Tomado em seu Sentido mais Amplo"), o físico e matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) apresentou o **Princípio de Maupertuis** por intermédio da expressão ($m\,v\,s = m\,v\,v\,t = m\,v^2\,t$, com m constante) (na notação atual):

$$\delta \int v ds = \delta \int v^2 dt = 0,$$

expressão essa que indica que a **ação de Maupertuis** era mínima para movimento de partículas ao longo de curvas planas. É interessante ressaltar que, além de razões físicas, Maupertuis e Euler alegavam razões teológicas para o seu **Princípio**, já que achavam que as leis do comportamento da natureza possuem a perfeição digna da Criação de **DEUS**. [8]

Os trabalhos de Euler sobre o problema variacional atraíram a atenção do matemático franco-italiano Joseph Louis, Conde de Lagrange (1736-1813), em 1750, quando era um jovem professor da *Escola de Artilharia*, em Turim, na Itália. Depois de ler esses trabalhos, principalmente o **Methodus**, Lagrange descartou os argumentos geométricos usados por Euler e pelos irmãos Bernoulli, os matemáticos suíços John (Johann, Jean) (1667-1748) e James (Jakob, Jacques) (1654-1705), quando pesquisaram esse problema, [9, 10] e começou a estudá-lo sob o ponto de vista puramente analítico. Desse modo, em trabalhos realizados no período 1760-1761, nos quais apresentou seu "método das variações" [11], com o qual se calcula o mínimo de uma função integral, Lagrange obteve o **Princípio de Maupertuis-Euler** por intermédio da ***força viva leibnitziana*** (T = m v²) de um corpo de massa m e velocidade v (em notação atual):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0.$$

Mais tarde, em 1788, Lagrange publicou o livro **Mécanique Analytique** ("Mecânica Analítica"), no qual usou seu "método variacional", acima referido, e demonstrou a equação (hoje conhecida como **Equação de Euler-Lagrange**):

$$(d / dt)(\partial T / \partial \dot{q}_i) - \partial T / \partial q_i + \partial V / \partial q_i = 0,$$

onde T ($\dot{q}_i$) é a ***energia cinética***, V (q_i) é a ***energia potencial*** de um sistema de n partículas, e ($q_i, \dot{q}_i$) são as ***coordenadas generalizadas*** (posição e velocidade) conceituadas por Lagrange, em 1782. Também nesse livro, Lagrange estudou o movimento espacial das partículas constituintes de um fluido, por intermédio de suas trajetórias, estudo esse hoje conhecido como ***descrição lagrangeana***.

Registre-se que a **Equação de Euler-Lagrange** recebeu uma nova formulação, em 1809 (*Journal de l´École Polytechnique* **8**, p. 266), pelo matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840), ao definir a função ***lagrangeana***: L = T ($\dot{q}_i$)– V (q_i). Dessa maneira, ele escreveu que:

$$d / dt[(\partial L / \partial \dot{q}_i)] - \partial L / \partial q_i = 0,$$

também conhecida como **Equação de Euler-Lagrange-Poisson**. [12]

MECÂNICA DOS FLUIDOS E GRAVITAÇÃO

Ainda no Século 18, novas contribuições de matemáticos franceses foram dadas para o entendimento da Física. Vejamos quais. Em 1743, o matemático francês Jean le Rond d´Alembert (1717-1783) publicou seu famoso livro **Traité de Dynamique** ("Tratado de Dinâmica"), no qual resolveu a controvérsia entre os conceitos de ***quantidade de movimento cartesiano*** (mv) (efeito de uma força no tempo) e ***força viva leibnitziana*** (m v²) (efeito de uma força no espaço). Com efeito, como um corpo sob a ação de certa força leva determinado tempo para percorrer uma distância, d´Alembert mostrou que a ação dessa força poderia ser calculada por seu efeito no tempo ou no espaço. No primeiro caso (tempo), a medida da força se faz por intermédio de mv e, no segundo caso (espaço), por intermédio de mv². [13]

Ainda naquele livro, d´Alembert usou o ***princípio da velocidade*** (***deslocamento***) ***virtual*** ou ***princípio das acelerações reversas*** [14] para estudar problemas da Dinâmica, por intermédio da Estática, usando para isso a ***força de inércia*** (- m $\vec{a}$), ou seja, ele escreveu a ***Segunda Lei de Newton*** na forma: $\vec{F} - m\vec{a} = 0$. Desse modo, o corpo em movimento é então levado ao repouso por intermédio das ***acelerações reversas***. Em vista disso, esse princípio ficou conhecido como **Princípio de d´Alembert**. Note-se que, para d´Alembert, os princípios da Dinâmica deveriam ser obtidos pelos efeitos da força e não da força em si, já que está jamais é vista.

É ainda de d´Alembert uma contribuição importante para o entendimento do ***problema da corda vibrante***. [15] Com efeito, em 1746, ele escreveu dois artigos intitulados **Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration** ("Pesquisas sobre a forma de uma corda tensa colocada em vibração") e **Suite des Recherches sur la courbe que forme une corde tendue em vibration** ("Continuação das Pesquisas sobre a forma de uma corda tensa colocada em vibração"), apresentados à *Academia de Ciências e Letras de Berlim*, em 1747, nos quais deduziu a ***equação parcial diferencial da corda vibrante***:

$$\partial^2 y(x,t)/\partial x^2 - (1/a^2)\partial^2 y(x,t)/\partial t^2 = 0 \rightarrow \Box\ y(x,t) = 0,$$

com $a^2 = T/\sigma$, sendo T a tensão na corda (de comprimento ℓ), σ sua massa por unidade de comprimento, y (x, t) a altura da corda na posição x e no instante t e $\Box$ é o hoje conhecido ***operador d´alembertiano***. Para essa equação, d´Alembert encontrou uma solução da forma:

$$y(x, t) = (1/2)\,[f(x + at) - f(x-at)],$$

com f(x) [= y(x, 0)] uma "função arbitrária", representando a posição inicial (t = 0) da corda.

A polêmica que se seguiu a essa solução foi a de saber se toda a posição inicial da corda poderia ser descrita pela "função" f(x). É oportuno destacar que, até o Século 18, o conceito de função ainda não estava bem entendido. Nessa época, o conceito de ***função*** referia-se a fórmulas, isto é, que uma relação entre y e x só podia ser chamada de ***função*** se pudesse ser expressa por uma fórmula. Desse modo, não estava claro se qualquer posição inicial da corda poderia ser descrita por uma dada fórmula. Essa polêmica começou a ser resolvida quando Euler escreveu um artigo, apresentado à *Academia de Ciências e Letras de Berlim*, em 1748, no qual demonstrou que se a forma inicial da corda fosse periódica, dada por (em notação atual):

$$y(x,0) = \sum A_n sen(n\pi x/\ell),$$

Então, a solução geral da ***corda vibrante*** seria dada por (também em notação atual)

$$y(x,t) = \sum A_n sen(n\pi x/\ell) \times \cos(n\pi a t/\ell),$$

com A_n constantes. No entanto, nessa solução, Euler não informou se o somatório (Σ) envolvia um número finito ou infinito de termos, apesar de ele já considerar a ideia da superposição de modos vibracionais da corda. Essa questão foi resolvida por d´Alembert, em trabalho apresentado, em 1753, à *Academia de Ciências e Letras de Berlim*, [16] no qual mostrou que o somatório envolvia um número infinito de termos, ou seja, o n do somatório variava de 1 até ∞.[17]

As soluções encontradas por Euler e d´Alembert, vistas acima, apresentavam um impasse uma vez que, enquanto Euler admitia que a posição da corda poderia ser não-analítica, d´Alembert só a considerava como analítica. Esse impasse foi contornado por Lagrange, em trabalhos publicados em 1759 (*Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis* **1₃**) e 1762 (*Miscellanea Philosophica-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis* **2₂**), nos quais resolveu a equação diferencial da ***corda vibrante*** usando alguns artifícios matemáticos. Assim, multiplicando essa equação por uma função desconhecida, Lagrange transformou-a em duas equações diferenciais ordinárias, e ao resolvê-las obteve a solução final da equação da ***corda vibrante*** dada pela seguinte equação (em notação atual):

$$y(x,t) = (1/2)\left[f(x+at) + f(x-at) - \int_0^{x+t} g(x)dx + \int_0^{x-t} g(x)dx \right],$$

onde f(x) = y(x,0) e g(x) $= (\partial y / \partial t)_{t=0}$. Desse modo, conforme o próprio Lagrange observou, essa solução concordava com a de d´Alembert. [18]

Também no Século 18, uma nova contribuição de matemáticos franceses foi importante para o entendimento da gravitação newtoniana. Com efeito, em uma série de três pesquisas realizadas em 1772, 1773 e 1775, o matemático e astrônomo francês Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827) calculou a força de atração gravitacional exercida pelos corpos de revolução (esferóides, por exemplo), porém, nesses cálculos, trabalhou apenas com os componentes dessa força, sem usar o ***potencial gravitacional*** V. [19] Esse tipo de cálculo também foi objeto de pesquisa por parte do matemático francês Adrien Marie Legendre (1752-1833), em 1782 [*Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l´Academie Royale des Sciences, par Divers Sçavans, e Lus dans ses Assemblées* **10** (1782), p. 411, publicado em 1785], no trabalho intitulado **Recherches sur l´attraction des sphéroides** ("Pesquisas sobre a atração dos esferóides"), no qual demonstrou o importante Teorema: - *Se a atração de um sólido de revolução é conhecida em cada ponto externo do prolongamento de seu eixo, então ela será conhecida em qualquer ponto externo*. Ainda nesse trabalho, Legendre calculou o componente da força de atração gravitacional exercida por um esferóide de massa (m), por intermédio do **Polinômio de Legendre** (P_n), solução de sua famosa **Equação de Legendre**:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + n\,(n + 1)\, y = 0. \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Registre-se que, em 1784 [*Histoire de l´Academie Royale avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, Paris* (1782), p. 370, publicado em 1787] e em 1789 (*Histoire de l´Academie Royale avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, Paris* (1789), p. 372, publicado em 1793), Legendre demonstrou as ***relações de ortogonalidade*** de seus polinômios. Registre-se, também, que no artigo de 1789, Legendre trabalhou com a hoje conhecida **Equação Associada de Legendre**:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + [n\,(n + 1) - m^2/(1 - x^2)\, y = 0, \qquad (n, m = 0, 1, 2, ...)$$

cuja solução é o **Polinômio Associado de Legendre** (P_n^m). [20]

O trabalho de Lagrange de 1782 inspirou Laplace a escrever, ainda em 1782 [*Histoire de l´Academie Royale avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, Paris* (1782), p. 113, publicado em 1785], seu famoso artigo intitulado **Théorie des Attractions des Sphéroides et de la Figure des Planètes** ("Teoria das Atrações dos Esferóides e da Forma dos Planetas"), no qual estudou o problema da força de atração gravitacional entre esferóides por intermédio do ***potencial gravitacional*** tridimensional [$V(r,\theta,\phi)$], encontrando a seguinte equação diferencial (em notação atual):

$$(\partial/\partial\mu)[(1-\mu^2)\partial V/\partial\mu]+[1/(1-\mu^2)]\partial^2 V/\partial\phi^2 + r\partial^2(rV)/\partial r^2 = 0. \quad (\mu = \cos\theta)$$

Ainda nesse mesmo artigo, ao considerar que: $V(r,\theta,\phi)$ = $U_0/r+U_1/r^2+U_2/r^3$ + …,

onde $U_n(\theta,\phi)$, Laplace demonstrou que (também em linguagem atual): [21]

$$(\partial/\partial\mu)[(1-\mu^2)\partial U_n/\partial\mu]+[1/(1-\mu^2)]\partial^2 U_n/\partial\phi^2 + n(n+1)U = 0. \quad (\mu = \cos\theta)$$

Também em 1782, Lagrange estudou sistemas de massas pontuais, ocasião em que propôs, conforme registramos acima, o conceito de ***coordenadas generalizadas*** (posição e velocidade: $q_i, \dot{q}_i$), como qualquer conjunto de coordenadas que pode, sem ambiguidade, definir a configuração desses sistemas. Mais tarde, em 1787, Laplace demonstrou que a ***função potencial*** V (x, y, z) deve satisfazer a hoje famosa **Equação de Laplace** (em notação atual):

$$\partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial y^2 + \partial^2 V/\partial x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta V = 0,$$

onde Δ é o **operador laplaciano**. Registre-se que Euler, em trabalhos sobre a Mecânica dos Fluidos, realizados entre 1752-1755, chegou a trabalhar com uma equação desse tipo. Registre-se, também, que em seu trabalho de 1787, Laplace cometeu um erro ao afirmar que sua equação valia também para pontos interiores ao corpo gerador do potencial V. Contudo, esse erro foi corrigido por Poisson, em 1813 (*Nouveau Bulletin de la Societé Philomatique de*

Paris **3**, p. 388), quando mostrou que a solução para o potencial gravitacional (V) no interior de corpos com densidade ρ, é dada por (na linguagem de hoje): $\Delta V = -4 \pi \rho$.

ESTÁTICA

Vejamos agora a contribuição dos matemáticos franceses para novos entendimentos da Física, no Século 19, além dos já tratados neste artigo. Logo em 1803, o matemático francês Louis Poinsot (1777-1859) publicou o livro **Eléments de Statique** ("Elementos de Estática") no qual introduziu o conceito de ***binário*** ou ***conjugado*** ("couple"), que é um conjunto de duas forças de mesma intensidade, paralelas e de sentidos contrários, cujos pontos de aplicação situam-se em pontos distintos. Ainda nesse livro, demonstrou o importante Teorema para o estudo da Estática: *Um corpo estará em equilíbrio sob a ação de um sistema de forças se a sua resultante for nula, e seu conjugado resultante também for nulo ao mesmo tempo*. Em notação atual, esse Teorema é representado por:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = 0 \,,$$

onde $\vec{F}$ e $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ representam respectivamente, a ***força*** e o ***torque*** totais externos que atuam em um corpo rígido. [22, 23]

MECÂNICA DO CONTÍNUO

Tratemos, agora, da contribuição dos matemáticos franceses ao estudo do movimento de um sistema contínuo (p.e.: fluidos). Este foi iniciado por Newton no Livro II de seu famoso **Principia** (1687), quando se interessou em saber a forma de uma superfície de revolução, movendo-se em um fluido perfeito ideal com velocidade constante na direção de seu eixo, sob uma pressão perpendicular a essa superfície e proporcional ao quadrado da velocidade na direção da normal a essa mesma superfície. No Século 18, aquele estudo foi continuado por Euler, d´Alembert e Daniel Bernoulli, conforme vimos anteriormente. Tal estudo recebeu, no Século 19, importantes contribuições de matemáticos franceses, sobretudo no que trata do movimento de fluidos reais, considerando o atrito: interno (entre suas partículas constituintes) e externo (com as paredes dos tubos). Assim, em 1821, o matemático francês Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) estudou o movimento dos fluidos ideais levando em consideração a sua viscosidade, hoje conhecidos como ***fluidos viscosos***. [24] Logo depois, em 1822, o matemático francês Barão Augustin Louis Cauchy (1789-1857) considerou o aspecto real (anisotrópico) dos fluidos. Inicialmente, ele postulou o caráter ***tensorial*** da tensão, ao observar que toda deformação em um corpo pode ser interpretada localmente como o produto de uma deformação pura por uma rotação, da qual deriva o princípio de transformações lineares não singulares em uma composição de transformações canônicas. Desse modo, ficou consagrado o conceito de **tensor de tensões** (T_{ij}). Assim, ao estabelecer esse conceito, Cauchy obteve a equação geral do movimento de um sistema contínuo real (em notação atual):

$$\sum_i \partial_i (\rho v_i v_j - T_{ij}) + \partial_0 (\rho v_j) = f_j ,$$

onde v_i (v_j) é a velocidade do contínuo de densidade ρ, sujeito a uma força externa f_j, e ∂_i e ∂_0 significam, respectivamente, a derivada parcial em relação às variáveis espaciais (x, y, z), e temporal (t). Registre-se que, quando o sistema contínuo é um fluido perfeito, isto é, a tensão é uma grandeza escalar, a **Equação de Cauchy** se transforma na ***Equação de Euler***, e neste caso o fluido é chamado ***euleriano***. [25]

FÍSICA-MATEMÁTICA

Ainda no Século 19, um passo importante para a futura Revolução Quântica que aconteceria no Século 20, foi dado por matemáticos franceses ao desenvolverem a hoje conhecida Física-Matemática, que trata da solução de equações em derivadas parciais usando sistemas de coordenadas diferentes das tradicionais ortogonais retilíneas. Com efeito, em 1833 (*Journal de l´Ecole Polytechnique* **14**, p. 194), o também engenheiro Gabriel Lamé (1795-1870) introduziu novos sistemas de coordenadas curvilíneas (hoje, conhecidas como sistema elipsoidal e hiperboloidal de uma e duas folhas) para resolver a ***equação do calor de Fourier*** (1822). Ao estudar o caso estacionário (temperatura independente do tempo), Lamé demonstrou que poderia resolver a equação do calor correspondente (tipo equação do potencial gravitacional), usando a técnica da ***separação de variáveis*** [26] e, com isso, reduziu-a para três equações diferenciais ordinárias. Em 1837 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **2**, p. 147) e 1839 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **4**, p. 126; 351), Lamé introduziu um novo sistema de coordenadas (esferoconal: uma superfície esférica e duas cônicas) para também resolver a equação geral do calor. Por fim, em 1859, ele escreveu o livro intitulado **Leçons sur les Coordonnées Curvilignes et leurs Diverses Applicationes** ("Lições sobre as Coordenadas Curvilíneas e suas Diversas Aplicações"), no qual estendeu seu trabalho em Teoria do Calor e aplicou-o na solução de vários problemas de natureza física, tal como a refração dupla na teoria da propagação da luz nos cristais e as condições de equilíbrio de uma casca esférica sob uma dada distribuição de cargas, na Teoria da Elasticidade.

Novos aspectos da Física-Matemática relacionados com a solução de equações diferenciais ordinárias, por intermédio de suas ***autofunções*** e correspondentes ***autovalores***, foram apresentados pelos matemáticos franceses Charles François Sturm (1803-1855) e Joseph Liouville (1809-1892). Com efeito, em 1833, [27] Sturm chegou a essa solução estudando o fluxo de calor em uma barra de densidade variável. Ao comunicar essa sua descoberta ao seu amigo Liouville, este também passou a se interessar por esse problema, chegando, os dois, a publicar três artigos: um em 1836 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **1**, p. 252) e dois em 1837 (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **2**, p. 16; 418), Esse trabalho conjunto desses dois matemáticos é hoje conhecido como o famoso

Problema de Sturm-Liouville e sumarizado da seguinte maneira. Dada a equação diferencial ordinária definida por:

$$A(x)d^2y(x)/dx^2 + B(x)dy(x)/dx + [C(x) + \lambda\ D(x)]\ y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$Ay'' + By' + [C + \lambda D]y = 0,$$

Sturm e Liouville mostraram que ela pode ser escrita na forma:

$$[r(x)\ y']' + [q(x) + \lambda\ p(x)]\ y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{L}\,[y(x)] = -\lambda\ p(x)\ y(x)\,,$$

$$r(x) = \exp\,[\int (B/A)dx\,]\,,\ \ q(x) = (C/A)\exp\,[\int (B/A)dx\,],$$

$$p(x) = (\lambda D/A)\exp\,[\int (B/A)dx\,],$$

onde $\hat{L} \equiv [r(x)\ y']' + q(x)\ y(x)$ é o ***operador de Sturm-Liouville***, p(x) é a ***função peso***, e λ o ***autovalor***. A equação diferencial acima é conhecida como **Equação de Sturm-Liouville**, que é uma ***equação de autovalores***.

Se, em um dado intervalo fechado (a, b), a função [y(x)] solução dessa equação satisfaz às condições de contorno:

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0; \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0,$$

com a_1, a_2, b_1, b_2 constantes reais dadas, então a **Equação de Sturm-Liouville**, com as condições acima – o referido **Problema de Sturm-Liouville** - apresenta duas soluções: $y_n(x)$ e $y_m(x)$, linearmente independentes, conhecidas como ***autofunções***, e com os respectivos ***autovalores*** $\lambda_n e \lambda_m$. Se tivermos:

a) $\lambda_n \neq \lambda_m$, então:

$$\int_a^b p(x)y_n(x)y_m(x)dx = 0,$$

b) $\lambda_n = \lambda_m$, então:

$$\int_a^b p(x)[y_n(x)]^2\,dx = \alpha\,,$$

com α sendo uma constante, determinada para cada tipo de equação diferencial.[28]

Nas duas últimas décadas do Século 19, três importantes **Problemas de Sturm-Liouville** (PE-L) foram pesquisados por matemáticos franceses. O primeiro dos PE-L deve-se a Legendre, em trabalhos realizados em 1782, 1784 e 1789 (referidos anteriormente), quando estudava a gravitação de corpos esferóides, nos quais apresentou suas duas hoje famosas equações. A primeira (**Equação de Legendre**):

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + n\,(n + 1)\, y = 0 \;\Leftrightarrow\; [(1 - x^2)\, y']' = -\, n(n + 1)\, y,$$

cuja solução são os **Polinômios de Legendre** [$P_n(x)$], com $q(x) = 0$, $r(x) = (1 - x^2)$, $p(x) = 1$, $\alpha = [2/(2n + 1)]$, $\lambda = n\,(n + 1)$, $(a, b) = (-1, +1)$ e $n = 0, 1, 2, \dots$.

A segunda equação (**Equação Associada de Legendre**) é dada por:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + [n\,(n + 1) - m^2/(1 - x^2)\, y = 0, \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

que tem como solução os **Polinômios Associados de Legendre**:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\, d^m\, P_n(x)/dx^m\,,$$

sendo $\alpha = [2(n + m)!/(2n + 1)\,(n - m)!]$. Conforme vimos na Nota [20], a solução angular ($x = \cos\,\theta$) da ***Equação de Schrödinger*** (1926) para o átomo de hidrogênio (H) envolve o P_n^m.

O segundo dos PE-L surgiu dos trabalhos de Charles Hermite (1822-1901) na solução de equações diferenciais ordinárias com intervalos infinitos. Assim, em 1864 (*Comptes Rendus de l´Academie des Sciences de Paris* **58**, p. 93; 266), ele apresentou a hoje conhecida **Função de Hermite** [$u(x)$], solução da seguinte equação diferencial:

$$u''(x) + (2\nu + 1 - x^2)\, u(x) = 0.$$

Agora, fazendo a mudança de variável: $u(x) = \exp\,[-\, x^2/2]\, y(x)$, a equação acima se transforma na hoje conhecida **Equação de Hermite**:

$$y'' - 2\, x\, y' + 2\,\nu\, y = 0 \;\Leftrightarrow\; [\exp\,(-\, x^2) y']' = -\, 2\,\nu\, \exp(-\, x^2)\, y, \quad (\nu\; \varepsilon\; R)$$

cuja solução é o **Polinômio de Hermite** (H_n), com q(x) = 0, r(x) = p(x) = exp (- x^2), λ = 2 ν, $\alpha = 2^n$ n! $\sqrt{\pi}$ e (a, b) = (-∞, +∞). Destaque-se que a solução da ***Equação de Schrödinger*** (1926) para o oscilador harmônico unidimensional é dada pela **Função de Hermite**: φ(x) = exp [- $x^2/2$] H_n(x).

O terceiro dos PE-L foi encontrado por Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886) ao resolver integral $\int_x^{\infty} [\exp(-x')/x']dx'$, em 1879 (*Bulletin de la Societé Mathématique de France* **7**, p. 72), quando trabalhou com suas duas hoje famosas equações. A primeira (**Equação de Laguerre**):

$$x\,y'' + (1 + x)\,y' + \nu y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [x \exp(-x)\,y']' = -\nu \exp(-x)\,y, \qquad (\nu \ \varepsilon \ R)$$

cuja solução é o **Polinômio de Laguerre** (L_n), com q(x) = 0, r(x) = x exp (- x), p(x) = exp (- x), α = 1, $\lambda = \nu$ e (a, b) = (0, +∞).

A segunda equação (**Equação Associada de Laguerre**) é dada por:

$$x\,y'' + (m + 1 - x)\,y' + (n - m)\,y = 0, \quad (n \geq m;\ n, m\,\varepsilon\ I_+)$$

que tem como solução os **Polinômios Associados de Laguerre** (L_n^m):

$$L_n^m(x) = d^m L_n(x)/dx^m.$$

Destaque-se que a solução radial da ***Equação de Schrödinger*** (1926) para o átomo de hidrogênio envolve L_n^m.

RELATIVIDADE E FORMAS DIFERENCIAIS

Na conclusão deste artigo, vejamos as contribuições de dois importantes matemáticos franceses para o desenvolvimento da Física: o também filósofo Jules Henri Poincaré (1854-1912) e Éli-Joseph Cartan (1869-1951). Comecemos com os trabalhos de Poincaré, abordando, principalmente, seu papel na formulação da Teoria da Relatividade Restrita (TRR). [29]

No final do Século 19, três importantes questões eram discutidas pelos cientistas no sentido de entender a Dinâmica Newtoniana e a Eletrodinâmica Maxwelliana dos corpos em movimento, tais como: 1) a ***simultaneidade*** de dois eventos separados no espaço, cujo conceito está relacionado com a Dinâmica Newtoniana, segundo a qual o ***espaço*** e o ***tempo*** são postulados como absolutos; 2) a existência do ***éter luminífero cartesiano***, questionada desde a ***experiência de Michelson-Morley***, realizada em 1887; [1] e 3) a assimetria das ***Equações de Maxwell*** (carga elétrica em repouso cria apenas campo elétrico, e ela em movimento, para quem a observa, cria campo elétrico e magnético) e a sua invariância. Note-se que essas equações foram apresentadas pelo físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879), em seu famoso livro intitulado **A Treatise on Electricity and Magnetism** ("Um Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo"), publicado em 1873. Esses três importantes problemas, fundamentais para o desenvolvimento da TRR, foram tratados por Poincaré. Vejamos como.

Em 1898 (*Revue de Métaphysique et de Morale* **6**, p. 1), Poincaré publicou um artigo no qual discutiu a simultaneidade de dois eventos separados no espaço, bem como a igualdade de dois intervalos de tempo. Também nesse artigo, ele questionou o "significado objetivo da simultaneidade". [30] Nesse trabalho, Poincaré ainda não havia mencionado qualquer problema relacionado com o éter e nem com a Eletrodinâmica Maxwelliana. Contudo, logo depois, em 1900 (*Archives Néerlandaise des Sciences Exactes et Naturales* **5**, p. 232), ele discutiu a ação do momento eletromagnético (p) sobre o "éter livre" e, com isso, demonstrou que a energia (E) da radiação eletromagnética que se desloca com a velocidade c, no vácuo, vale mc^2, pois (em notação atual): $p = mc = E/c \rightarrow E = mc^2$. Ainda nesse artigo de 1900, Poincaré apresentou uma interpretação física para o conceito de ***tempo local*** ($t' = t - r/v$) discutido pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928; PNF, 1902) em seu livro intitulado **Versuch ein Theorie der eletrischen und optiken Erscheinungen in bewegten Körpen** (Brill: Leiden, 1895). Com essa interpretação, Poincaré deduziu a lei de transformação do campo eletromagnético, considerando as fontes do mesmo, ou seja: densidade de carga (ρ) e de corrente ($\vec{J}$). Note-se que, para essa demonstração, Poincaré usou um tipo de transformação que seria mais tarde também utilizada por Lorentz, em 1904 (*Koniklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* **6**, p. 809), em seu novo modelo para estudar o movimento de um elétron, considerado esférico e que se contraía quando se deslocava com velocidade constante.

Ainda em 1900 (*Rapports présentés au Congress International de Physique de 1900: Paris* **1**, p. 1), Poincaré voltou a discutir a existência do éter, com os argumentos preliminares apresentados nesse Congresso, reproduzidos e mais elaborados no livro **O Valor da Ciência**, referido na nota [30]. Em 1904 (*Bulletin de la Société Mathematique de France* **28**, p. 302), ele tratou novamente do éter, ocasião em que formulou a seguinte pergunta: *Que é o éter, como suas moléculas se arranjam, elas se atraem ou se repelem?*. Além dessa pergunta, Poincaré afirmou nesse artigo que os corpos em movimento sofrem uma contração uniforme na direção desse movimento.

Em 05 de junho de 1905, Poincaré comunicou à *Academia Francesa de Ciências* um trabalho, publicado ainda nesse ano (*Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l´Académie des Sciences de Paris* **140**, p. 1504), no qual apresentou a famosa ***transformação de Lorentz***, cujo nome foi cunhado por ele nessa ocasião, e hoje é representada pelas expressões:

$$x' = \gamma\,(x - v\,t)\;;\; y' = y;\;\; z' = z;\; t' = \gamma\,(t - v\,x/c^2)\,,$$

onde: $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.[31] Também nesse artigo, Poincaré discutiu o problema da gravitação Newtoniana, afirmando que todas as forças deveriam se transformar da mesma maneira sob aquela transformação. Afirmou, também, que a Lei da Gravitação Newtoniana deveria ser modificada e, como conseqüência dessa afirmação, escreveu: *Deveriam existir ondas gravitacionais que se propagam com a velocidade da luz!*

Muito embora Poincaré haja trabalhado com o que chamou de ***transformação de Lorentz*** (conforme vimos acima) e mostrado como o eletromagnetismo Maxwelliano se comporta com essa transformação, e ainda demonstrado a famosa relação ***massa*** × ***energia***, conforme também vimos acima, ele não formulou a hoje conhecida TRR, conforme Einstein o fez, em artigo que enviou para a *Annalen der Physik*, em 30 de junho de 1905, publicado no Volume **17**, p. 891, dessa Revista. Porém, logo em 1906 (*Rendiconti del Circolo Matemático de Palermo* **21**, p. 129), Poincaré publicou um trabalho no qual usou a ***transformação de Lorentz*** para demonstrar a covariância da Eletrodinâmica Maxwelliana, que foi importante para o desenvolvimento posterior da TRR e da formulação da Teoria Relatividade Geral (TGR), por Einstein, em 1915. Foi nesse trabalho que Poincaré demonstrou a estrutura de grupo daquela transformação e mostrou também que, quando ela contém uma translação no espaço-tempo, dada por (em linguagem tensorial atual): $x'^{\mu} = a^{\mu} - \Lambda^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu}$, onde Λ^{μ}_{ν} é a ***matriz de Lorentz***, tem-se um grupo mais amplo do que o Lorentziano, hoje conhecido como **Grupo (Transformação) Local de Poincaré**.

Por fim, é oportuno destacar que, até sua morte, em 1912, Poincaré continuou acreditando no ***éter luminífero cartesiano***, conforme se pode ver no artigo que escreveu em 1912 (*Journal de Physique Théorique et Appliquée* **2**, p. 347), intitulado **Les Rapports de la Matière et de l´Éther** ("As Relações da Matéria e do Éter"), artigo esse reproduzido em seu último livro de nome **Dernières Pensées** ("Últimos Pensamentos"), publicado postumamente, em 1913, em Paris, pela Flammarion.

Por fim, vejamos o trabalho de Cartan. Em 1945, ele desenvolveu o formalismo das **formas exteriores diferenciais**, [32] que são quantidades que ocorrem sob o sinal de integral. Sua importância para a Física deve-se ao seguinte fato. De um modo geral, a ferramenta matemática usada para tratar as leis físicas tem sido o Cálculo Tensorial, principalmente quando as mesmas envolvem simetrias. Contudo, existem situações físicas em que o uso de tensores tem-se mostrado inadequado, uma vez que esses entes matemáticos dependem de um sistema de coordenadas em relação ao qual se representam as coordenadas desses entes. Essa inadequação se evidencia na manipulação do labirinto de índices ligados a esses componentes e, em vista disso, aspectos importantes de certas situações são, às vezes, perdidos, por exemplo, se uma partícula é obrigada a se deslocar em uma esfera, um único sistema de coordenadas não pode descrever completamente a posição da mesma, e muito menos seu espaço de fase ou espaço de estados (espaço de configurações). Portanto, tais dificuldades são sanadas quando se usa a **representação intrínseca** (**forma**) de um tensor e não o seu componente. Vejamos um exemplo do que acabamos de dizer tomando as ***Equações de Maxwell*** (na forma tensorial e na correspondente forma exterior):

$$\partial_{\lambda} F_{\mu\nu} + \partial_{\nu} F_{\mu\lambda} + \partial_{\mu} F_{\lambda\nu} = 0 \quad \leftrightarrow \quad dF = 0 \quad (F = B + E \wedge dt),$$

$$\partial_{\tau} F^{\mu\tau} = J^{\mu} \quad \leftrightarrow \quad dG = j \leftrightarrow dj = 0 \quad (G = D - H \wedge dt;\ j = Q - J \wedge dt)\,.$$

Concluindo este artigo, é oportuno registrar que o significado dos tensores ($F_{\mu\nu}$) e formas (F e G) indicadas acima, bem como de outras aplicações das **formas** podem ser vistos em vários livros que tratam da hoje conhecida **Física Geométrica**. [33]

NOTAS E REFERÊNCIAS

[1] BASSALO, J. M. F. 2009. www.searadaciencia.ufc.br/curiosidadesdafisica.

[2] Note-se que essa lei havia sido observada, experimentalmente, pelos astrônomos e matemáticos, o inglês Thomas Harriot (1560-1621), em 1616 (trabalho não publicado), e o holandês Willebrord van Roijen Snell (1591-1626), em 1621, daí ela ser conhecida, também, como Lei de Harriot-Snell-Descartes.

[3] É oportuno destacar que, ainda em 1687, o matemático francês Pierre Varignon (1654-1722) apresentou à *Academia Francesa de Ciências* o trabalho intitulado Projet d´une Nouvelle Mécanique ("Projeto de uma Nova Mecânica"), no qual está enunciado o importante princípio: *Quando um corpo está em equilíbrio sob a ação de forças concorrentes, a resultante dessas forças é nula*. Para chegar a esse princípio, Varignon usou a regra geométrica sobre composição de forças – o célebre paralelograma das forças -, cuja idéia para esse "paralelograma" ele a obteve usando uma espécie de máquina simples que idealizou e construiu – o funicular. Ainda nesse trabalho, Varignon apresentou a demonstração do hoje famoso Teorema de Varignon: *O momento da resultante de um sistema de forças é igual à soma dos momentos de suas componentes*. É ainda interessante notar que, também em 1687 e de maneira independente, o Princípio do Paralelograma das Forças, foi formulado pelo matemático francês, o padre Bernard Lami (1640-1715), que o apresentou em um pequeno apêndice ao seu livro intitulado Traité de Mécanique ("Tratado de Mecânica"), e por Newton em seu Principia. Registre-se que Varignon reuniu seus trabalhos sobre Estática em um livro intitulado Nouvelle Mécanique-Statique ("Nova Mecânica-Estática"), publicado postumamente, em 1725.

[4] D´ABRO, A. 1952. The Rise of New Physics (Dover Publishers).

[5] BORN, M. and WOLF, E. 1970. Principles of Optics (Pergamon Press).

[6] YOURGRAU, W. and MANDELSTAM, S. 1979. Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory (Dover).

[7] Somente na primeira metade do Século 19 é que essa polêmica sobre a velocidade da luz em meios mais densos foi resolvida por intermédio das experiências realizadas pelos físicos franceses Armand Hyppolyte Louis Fizeau (1819-1896), em 1849 (*Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l´Academie des Sciences de Paris* 29, p. 90), e Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868), em 1850 (*Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l´Academie des Sciences de Paris* 30, p. 551), nas quais determinaram a velocidade da luz na água e mostraram ser ela menor do que no ar. Estava, dessa maneira, confirmada a hipótese de Fermat.

[8] KLINE, M. 1972. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (Oxford University Press).

[9] BASSALO, J. M. F. 1998. Crônicas da Física, Tomo 5 (EDUFPA, 1998).

[10] TRUESDELL, C. A. 1968. Essays in the History of Mechanics (Springer-Verlag)

[11] É importante registrar que o nome "método (cálculo) das variações" foi dado por Euler no trabalho intitulado Elementa Calculi Variationum ("Elemento do Cálculo das Variações"), apresentado à *Academia de Berlim*, em 1756, e apresentado no *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 10 (1764), p. 141, publicado em 1766.

[12] Ainda nesse trabalho de 1809, Poisson apresentou duas definições:

1) *Momento Canonicamente Conjugado*: $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$;

2) *Parêntesis de Poisson*: $\{F, G\} = \sum_i (\partial F / \partial q_i \times \partial G / \partial p_i - \partial G / \partial q_i \times \partial F / \partial p_i)$.

[13] Para Descartes, em seu livro Principia Philosophiae ("Princípios de Filosofia") de 1644, a *quantidade de movimento* de um corpo é obtida multiplicando-se a sua massa (m) por sua velocidade (v), isto é: mv. Por outro lado, o matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), na *Acta Eruditorum Lipsiensium*, de 1686, afirmou que a *quantidade de movimento* de um corpo é calculada pelo produto de sua massa pelo quadrado de sua velocidade (mv^2), a qual denominou de *vis viva* ("força-viva"). Somente, em 1829, Coriolis mostrou que Leibniz havia se enganado, já que a *vis viva* nada mais era do que o dobro da *energia cinética* ($mv^2/2$). Hoje, as ações (espacial e temporal) de uma força (F), que atua em um corpo de massa (m), em repouso, e lhe provoca uma aceleração (γ), faz o mesmo se deslocar com uma velocidade $v = \gamma\, t$, e percorre o $s = \gamma t^2/2$, são calculadas da seguinte maneira:

$$Fs = m\gamma s = m\ \gamma\ \ \gamma t^2/2 = m(\gamma t)^2/2 = mv^2/2 = \text{energia cinética},$$

$$Ft = m\gamma t = mv = \text{quantidade de movimento}.$$

[14] O *princípio das acelerações reversas* já havia sido utilizado pelo matemático suíço James Bernoulli, em 1686 e 1703, ao desenvolver sua teoria sobre o centro de oscilação dos corpos. [PATY, M. 1998. D´Alembert (Les Belles Lettres).]

[15] O estudo da *corda vibrante* foi realizado, pela primeira vez, em 1713, independentemente, pelos matemáticos, o inglês Brook Taylor (1685-1731) e o francês Joseph Sauveur (1653-1716), conhecido como o criador da Acústica Musical. Mais tarde, em 1716, o matemático suíço Jakob Hermann (1678-1733) também tratou da corda considerando suas vibrações como sendo as de um oscilador harmônico simples.

[16] Registre-se que, também em 1753 e nessa mesma Academia Berlinense, o matemático suíço Daniel Bernoulli (1700-1782) mostrou que todos os modos de vibração de uma corda poderiam existir simultaneamente e, portanto, tanto a posição inicial da corda, quanto as demais posições seriam representadas por uma série infinita de funções trigonométricas.

[17] É oportuno destacar que as séries infinitas – hoje, Séries de Fourier - foram também usadas pelo matemático e físico francês Jean-Baptiste-Joseph, Barão de Fourier (1768-1830) na solução do problema da condução do calor em um sólido isotrópico e homogêneo, apresentada em seu célebre livro intitulado Théorie Analytique de la Chaleur ("Teoria Analítica do Calor"), publicado em 1822.

[18] D´Alembert também deu importantes contribuições para o entendimento da Mecânica do Contínuo. Por exemplo, em 1744, ele publicou o livro intitulado Traité de l´Equilibre et du Mouvement des Fluides ("Tratado do Equilíbrio e do Movimento dos Fluidos") no qual usou a "hipótese das secções paralelas", segundo a qual todas as partículas de um fluido em movimento têm a mesma velocidade. Destaque-se que essa hipótese já havia sido utilizada por Daniel Bernoulli, em seu famoso tratado intitulado Hydrodinamica ("Hidrodinâmica"), publicado em 1738. Contudo, como essa hipótese não considerava as forças exercidas pelos fluidos em movimento no qual há obstáculos a contornar, a *Academia de Ciências e Letras de Berlim* ofereceu, em 1746, um prêmio a quem

resolvesse o problema da resistência ao movimento dos fluidos. Esse prêmio foi ganho por d´Alembert com o livro intitulado Réflexions sur la Cause Générale des Vents ("Reflexões sobre a Causa dos Ventos"), publicado em 1747. Aliás, é importante destacar que foi nesse livro que houve, pela primeira vez, o uso das Equações Diferenciais Parciais na Física-Matemática. Destaque-se, também, que Euler tratou do movimento dos fluidos em seu manuscrito intitulado Scientia Navalis ("Ciência Naval"), publicado em 1738.

[19] A ideia de se poder calcular uma força por intermédio de uma "função potencial", já havia sido tratada por Daniel Bernoulli em seu livro Hydrodinamica citado na nota anterior. Mais tarde, em 1742, o matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), em seu livro Treatise of Fluxions ("Tratado das Fluxões") e, em 1743, Clairaut, no livro Théorie de la Figure de la Terre ("Teoria da Forma da Terra"), nos quais estudaram a atração entre corpos massivos, mostraram que era possível calcular a força gravitacional ($\vec{F}$) entre os mesmos por intermédio de uma função potencial [$V(\vec{r})$], ou seja, em notação atual, seria: $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$, onde ∇ é o *operador gradiente*. (KLINE, op. cit.).

[20] É interessante destacar que a solução angular (x = cos θ) da *Equação de Schrödinger* (1926) para o átomo de hidrogênio (H) envolve o P_n^m.

[21] Essa função $U_n(\theta,\phi)$ foi denominada pelo físico inglês William Thomson (Lord Kelvin de Largs) (1824-1907), de *harmônico esférico* [hoje: $Y_m^\ell(\theta,\phi)$]. Destaque-se, também, que se $U_n(\theta)$, então essa equação obtida por Laplace transforma-se na Equação de Legendre. (KLINE, op. cit.).

[22] Esse trabalho do francês Poinsot completou o estudo da Estática, iniciado pelo também francês Varignon, conforme vimos na Nota [3].

[23] Como o torque (N) de uma força (F), em módulo, é dado pelo produto de sua intensidade pela distância (r): N = F r, havia certa confusão entre esta grandeza física e uma outra que também envolvia esse tipo de produto. Pois bem, em 1826, o matemático francês, o General Jean Victor Poncelet (1788-1867), introduziu o conceito de *trabalho* (τ) para representar o produto de uma força F que atua em um corpo, pelo deslocamento s sofrido devido à ação dessa mesma força, isto é: F = τ s. Hoje, esses produtos são de natureza matemática completamente diferente: o *torque* é um vetor ($\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$) e o *trabalho* é um escalar ($\tau = \vec{F} \cdot \vec{s}$)

[24] Esse tipo de fluido foi também tratado por Poisson, em 1829. Aliás, registre-se que, como em 1845, o matemático inglês Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) também estudou esses fluidos, a equação de trata deles ficou conhecida como Equação de Navier-Stokes. Note-se que, nesse trabalho, Stokes deduziu a fórmula – *fórmula de Stokes* - que calcula a força de atrito exercida por um fluido sobre uma esfera.

[25] Os diversos tipos de fluidos dependem da *equação constitutiva*, ou seja, a equação que relaciona o tensor tensão e a taxa do tensor deformação. Por exemplo, quando essa relação é linear, o fluido é dito *newtoniano*.

[26] A técnica de resolver equações diferenciais usando a *separação de variáveis* foi inicialmente apresentada por Leibniz em uma carta escrita, em 1691, para Huygens. Essa técnica foi aprimorada pelo matemático suíço John (Johann, Jean) Bernoulli (1667-1748), em 1694. [BASSALO (1998), op. cit.; KLINE, op. cit.].

[27] Esse trabalho de Sturm só foi publicado em 1836, na Revista que foi fundada nesse mesmo ano por Liouville: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 1, p. 106; 373. Essa Revista também era citada como *Journal de Liouville*.

[28] Em 1838, Liouville demonstrou o hoje conhecido Teorema de Liouville relacionado com um movimento de um sistema de partículas:

$$d\rho / dt = \partial\rho / \partial t + \{\rho, H\},$$

onde ρ representa a *densidade* de estados desse sistema no *espaço de fase* – um espaço 2n-dimensional das variáveis q_i e p_i (i = 1, 2, ... , n), H = T + V é o *hamiltoniano* e {} é o *parêntesis de Poisson*.

[29] Antes de trabalhar com a TRR, Poincaré já havia dado uma grande contribuição à Física, particularmente, à Mecânica Estatística, ao demonstrar, em 1890 (*Acta Mathematica* 13, p. 167), o famoso *Teorema do Retorno de Poincaré*: *Qualquer sistema de partículas, com forças de interação que dependem apenas das posições, sempre retorna, depois de certo lapso de tempo* t, *a uma vizinhança arbitrariamente próxima das suas condições de partida*. Este Teorema foi importante para o entendimento do célebre *Teorema H de Boltzmann*, demonstrado pelo físico austríaco Ludwig Edward Boltzmann (1844-1896), em 1871/1872 (*Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien* 63; 66). É oportuno registrar que, para demonstrar seu Teorema, Poincaré usou, talvez pela primeira vez, o conceito de *conjuntos de "probabilidade" nula* em uma questão de Análise Matemática. Hoje, usa-se o conceito de *conjuntos de medida nula*. Também é oportuno registrar que nesse trabalho, no qual Poincaré estudou a estabilidade de um sistema dinâmico (em particular, do sistema planetário), ele tratou do famoso *problema de três corpos* (cujos trabalhos iniciais foram de Lagrange, em 1772), examinando a estabilidade da equação diferencial: $dy/dx = P(x, y)/ Q(x, y)$, em torno de uma dado ponto singular (x_0, y_0). Por essa mesma época, esse tipo de estabilidade também foi objeto de pesquisa por parte do matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918). No entanto, enquanto Poincaré usou argumentos geométricos e topológicos, Lyapunov lançou mão de conceitos puramente analíticos. Note-se que esses trabalhos de Poincaré e Lyapunov foram retomados a partir da década de 1960 quando se desenvolveu a hoje famosa Teoria do Caos e Fractais. [RUELLE, D. 1993. Acaso e Caos (EDUNESP); FIEDLER-FERRARA, N. e PRADO, C. P. C. do 1994. Caos: Uma Introdução (Edgard Blücher Ltda.); LORENZ, E. N. 1996. A Essência do Caos (EDUnB); PRIGOGINE, I. 2002. As Leis do Caos (EDUNESP)].

[30] Registre-se que tais discussões foram reproduzidas e ampliadas por Poincaré em seu famoso livro intitulado La Valeur de la Science/O Valor da Ciência (Flammarion, 1905; Contraponto, 1995).

[31] Essas expressões relacionam as coordenadas $(x, y, z; x', y', z')$ e os tempos (t, t') de dois sistemas de coordenadas de origem (O, O'), respectivamente, com o sistema O' se deslocando com velocidade constante (v) paralelamente ao eixo dos x, x'.

[32] Este formalismo era usado pelo saudoso geofísico brasileiro Luiz Rijo (1942-2009) em suas aulas e pesquisas, realizadas no *Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará* (IG/UFPA), e por isso prestamos uma Homenagem ao amigo Rijo neste texto.

[33] Por exemplo, os textos:

a) FLANDERS, H. 1963. Differential Forms with Applications to the Physical Sciences (Academic Press);

b) ALDROVANDI, R. and PEREIRA, J. G. 1995. An Introduction to Geometrical Physics (World Scientific);

c) SCHUTZ, B. 1995. Geometrical Methods of Mathematical Physics (Cambridge University Press);

d) GÖCKELER, M. and SCHÜCKER, T. 1995, Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity (Cambridge University Press);

e) BASSALO, J. M. F. e CATTANI, M. S. D. 2009. Cálculo Exterior (Livraria da Física).