ISSN (versão *online*): 2317-5125
95 Amazônia 243
Revista de Educação em Ciências e Matemáticas

Tipos de modeladores revelados no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática

Types of modelers revealed in the development of mathematical modeling activities

Erica Molleta [1]
Ana Paula Zanim [2]
Michele Regiane Dias Veronez [3]

Resumo

Pautadas na assertiva de que atividades de modelagem matemática são orientadas pela busca por solução(ões) para um problema da realidade, delimitamos como foco de estudo olhar para tal busca. Assim, nosso objetivo consiste em evidenciar tipos de modeladores revelados em duas atividades de modelagem matemática que foram desenvolvidas por alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental. As produções dos alunos, bem como as transcrições das gravações em áudio figuram nossos materiais de análise, que se baseia na abordagem qualitativa de pesquisa. Como resultados ponderamos que nas duas atividades desenvolvidas foi possível identificar modeladores do tipo: modelador realidade-distante e modeladores reflexivos. Ademais, concluímos que os tipos de modeladores revelados podem contribuir para o professor pensar em ações que façam um aluno evoluir de modelador menos interessados para modeladores reflexivos.

Palavras chave: educação matemática; modelagem matemática; tipos de modeladores.

Abstract

Guided by the assertion that mathematical modeling activities are guided by the search for solution(s) to a real problem, we delimited the focus of study to look at such a search. Thus, our objective is to highlight types of modelers revealed in two mathematical modeling activities that were developed by students of an 8th year of Elementary School. The students' productions, as well as the transcriptions of the audio recordings, are included in our analysis materials, which are based on a qualitative research approach. As a result, we consider that in the two activities developed, it was possible to identify modelers of the type: distant-reality modeler and reflective modelers. Furthermore, we conclude that the types of modelers revealed can help the teacher to think of actions that make a student evolve from a less interested modeler to a reflective modeler.

Keywords: mathematics education; mathematical modeling; types of modelers.

[1] Universidade Estadual do Centro Oeste | ericamoletta@hotmail.com
[2] Universidade Federal do Paraná | aninhapz@gmail.com
[3] Universidade Estadual do Paraná | miredias@gmail.com

Introdução

Estudar fenômenos reais no âmbito educacional tem composto a agenda de pesquisadores matemáticos, sobretudo àqueles que se dedicam à modelagem matemática. Há décadas, a modelagem matemática, reconhecida como uma possibilidade de abarcar um fenômeno real no contexto de aulas de matemática, tem sido discutida sob diversas óticas e nos mais diferentes contextos. Nesse artigo, a compreendemos como alternativa pedagógica conforme proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Nessa compreensão de modelagem matemática a resolução de um problema oriundo do interesse de estudar determinado fenômeno, acompanhada de todo o processo de busca por tal solução, conduz ao entendimento de que uma atividade de modelagem matemática está associada à busca por solução para um problema, a qual se dá mediante um conjunto de procedimentos e ações daqueles que a desenvolvem.

Na transição entre o que se quer investigar (do fenômeno) e a resposta obtida estão inerentes algumas fases que caracterizam o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, a saber: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Em sala de aula, são nessas fases que diversos processos são empreendidos pelos alunos e sinalizam seus modos de agir e pensar ao longo do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Na literatura, tais processos são discutidos sob diversos vieses. Há discussões que se apoiam em abordagens cognitivas (BORROMEO FERRI, 2006; VERTUAN, 2013; CASTRO, 2017; ZANIM, 2021), outras que se fundamentam em teorias de aprendizagem (BORSSOI, 2013; FONTANINI, 2007), aquelas que se utilizam de especificidades da própria modelagem (VERONEZ, CASTRO, MARTINS, 2018; KLÜBER, 2012; MAAβ, 2006; ALMEIDA, 2022) e aquelas que buscam estabelecer conexões com teorias de outras áreas do conhecimento como Filosofia e Semiótica (VERONEZ, ALMEIDA, 2017; TORTOLA, ALMEIDA, 2016; ALMEIDA, SILVA, 2021; ALMEIDA, 2010).

Neste estudo, apoiadas em resultados de pesquisas que se utilizam de especificidades da própria modelagem, nos interessa os processos empreendidos por alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental a partir de uma abordagem qualitativa de pesquisa, na qual o processo analítico tem caráter interpretativo.

Ao olhar para as ações dos alunos ao longo do desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática identificamos os deslocamentos que eles realizam ao transitar do problema à sua solução. Assim, elegemos por objetivo evidenciar os tipos de modeladores revelados no desenvolvimento dessas atividades.

A partir desse interesse estruturamos o artigo trazendo, primeiramente, considerações acerca da modelagem matemática na Educação Matemática. Nessa seção, fazemos um recorte com vistas a apresentar caracterizações da modelagem matemática e discutir sobre os tipos de modeladores, conforme enunciados por Maaβ (2006). Na sequência, elucidamos aspectos relacionados às nossas escolhas metodológicas.

Reflexões acerca dos deslocamentos dos alunos ao desenvolverem as atividades de modelagem matemática, à luz do referencial de Maaβ (2006) são apresentadas na seção intitulada: os tipos de modeladores revelados. Por fim, seguem as considerações finais acompanhadas das referências.

Modelagem matemática na educação matemática

O entendimento de modelagem matemática associado à análise de um fenômeno real (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012) propicia investigações que podem ser de interesse dos alunos e, como consequência, favorecer olhares sob os mais diversos enfoques.

Tambarussi e Klüber (2014) apresentam um estudo no qual pontuam que os focos abordados nas pesquisas são diversos e destacam alguns deles: a aplicação da modelagem matemática em diferentes perspectivas; aprendizagens no contexto da modelagem matemática; mapeamentos da utilização da modelagem matemática; modelagem e o conteúdo matemático; modelagem matemática e seus aspectos teóricos, filosóficos e epistemológicos; modelagem matemática e a formação de professores.

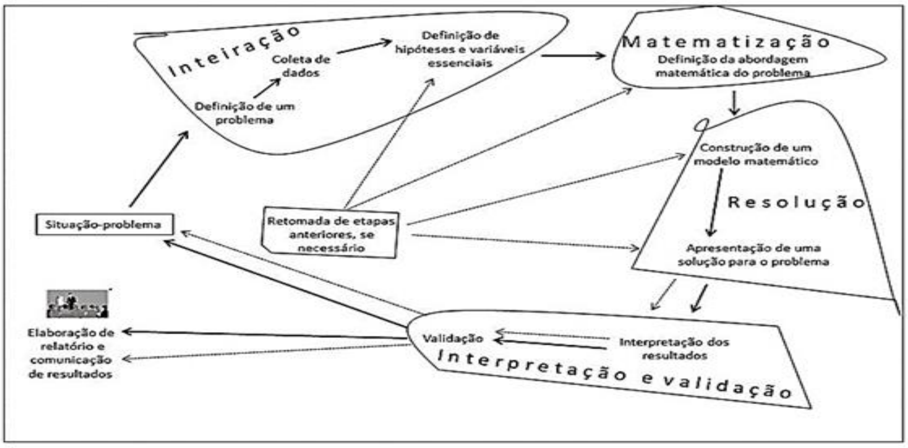
Em nosso estudo a atenção é direcionada a aspectos da modelagem matemática, levando em consideração as produções, ações e diálogos dos alunos ao longo do desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática e, nesse sentido, compõe o rol de pesquisas que se propõe a discutir sobre o fazer modelagem matemática na sala de aula, com foco em características da própria modelagem matemática.

Para o desenvolvimento do nosso estudo nos apoiamos nas assertivas de Almeida e Vertuan (2009) que asseveram que

> [...] a atividade de modelagem matemática consiste em partir de um fato real, preferencialmente do cotidiano dos alunos, e criar, por meio da coleta, análise e organização dos dados coletados, uma expressão em linguagem matemática que possa servir de parâmetro para descrição e compreensão da realidade (ALMEIDA, VERTUAN, 2009, p.1).

A modelagem matemática concebida nessa perspectiva também permite que ela seja caracterizada como atividades abertas que extrapolam o fato de resolver o problema que está em foco (VERONEZ, 2013) e privilegiam encaminhamentos diferentes de acordo com o interesse daqueles que a desenvolvem ou a propõem. Esses encaminhamentos estão ligados ao pensar e agir do aluno quando estão desenvolvendo atividades de modelagem matemática, e é a partir deles que vão surgindo conceitos e conteúdos matemáticos. Nessa compreensão, a modelagem matemática consiste em partir de uma situação-problema que se pretende investigar e chegar a uma solução para o problema eleito para estudo (Figura 1).

Figura 1 - A dinâmica de uma atividade de modelagem matemática



Fonte: Adaptado de (ALMEIDA; CASTRO; SILVA, 2021)

Essa caracterização de modelagem matemática, conforme ilustrado na Figura 1, sugere um trânsito entre a situação-problema da realidade, não essencialmente matemática, e a interpretação e validação da solução obtida para o problema evidenciado nessa situação-problema.

No trânsito ilustrado nessa figura, os alunos precisam manipular objetos matemáticos ao passo que têm que desenvolver capacidades de interpretação e argumentação, visando a resolução de um problema e a aceitabilidade da resposta obtida. É também no decorrer desse processo que conhecimentos matemáticos e não matemáticos podem ser produzidos em associação ao fazer dos alunos, expresso em seus diálogos, suas ações e suas produções.

Internacionalmente, Maaβ (2006) associa o fazer dos alunos ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática ao que ela denomina tipos de modeladores, quais sejam: modelador realidade-distante, modelador matemática-distante, modelador reflexivo e modelador desinteressado.

Modelador realidade-distante: esses modeladores demonstram ter mais interesse na abordagem de conceitos matemáticos para resolver o problema que analisar a situação que circunda o referido problema. Nesse sentido, esse tipo de modelador se atém mais a questões e conceitos matemáticos e se distancia um pouco dos aspectos reais associados ao problema que investiga.

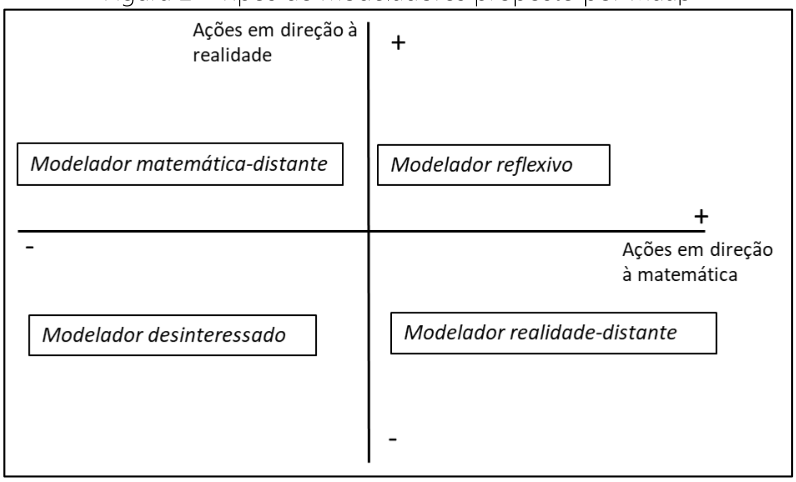
Modelador matemática-distante: esses modeladores dão preferência ao contexto do problema do mundo real. Eles acabam por priorizar aspectos da situação em detrimento a aspectos e conceitos matemáticos necessários para resolver o problema em estudo.

Modelador reflexivo: esses modeladores lidam com aspectos da situação em articulação com os conceitos matemáticos utilizados na resolução do problema.

Modelador desinteressado: esses modeladores não se interessam em resolver situações da realidade a partir de lentes da matemática, seja por não se interessar pela Matemática ou por se reconhecer como não sabendo matemática suficientemente para abordar situações reais, seja por não considerar necessário ou útil discutir situações da realidade em sala de aula.

Essas quatro categorias de tipos de modeladores são sintetizadas por Maaβ (2006) (Figura 2) a partir de um esquema representativo, o qual associa que os alunos podem ter ações que combinem matemática e realidade com maior ou menor intensidade.

Figura 2 - Tipos de modeladores proposto por Maaβ



Fonte: Adaptado de Maaβ (2006, p. 68)

Nessa figura o modelador reflexivo se localiza no quadrante em que as ações dos alunos combinam matemática e realidade de forma articulada e o modelador desinteressado naquele em que os alunos têm poucas ações tanto em relação à matemática como em relação à realidade. Os outros dois modeladores, contudo, se apresentam nos quadrantes que combinam ora ações mais próximas a conceitos matemáticos e mais distantes à realidade, ora mais próximas a aspectos da realidade e mais distante de conceitos matemáticos.

A seguir, apresentamos as opções e encaminhamentos metodológicos que subsidiam nosso estudo.

Percurso Metodológico

À vista do objetivo deste estudo, desenvolvemos uma pesquisa empírica na qual os dados foram produzidos por alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental ao longo do desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática: “Quanto suco existe em uma laranja?” e “Brigadeiro”.

Tais dados consistem em transcrições das gravações em áudio, registros escritos dos alunos, bem como anotações da professora, uma das autoras do artigo. Essas duas atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas com os alunos organizados em grupo, com a orientação da professora, na maioria das vezes, de forma coletiva, ou seja, ela fazia as orientações direcionadas a todos os alunos da turma.

A característica do estudo que empreendemos carece de um olhar interpretativo e, por esse motivo, é subsidiado pela abordagem qualitativa de pesquisa. Essa abordagem respeita o sujeito e o modo como compreende os fenômenos no âmbito da coleta de dados e resultados, e não se preocupa com valores quantitativos (LÜDKE; ANDRÉ, 1986; BOGDAN; BIKLEN, 1994).

No processo de análise dos dados as transcrições das falas dos alunos e da professora são apresentadas em forma de diálogos e correspondem a recortes do desenvolvimento das duas atividades de modelagem matemática trazidas à baila. Contudo, nosso olhar para esses dados se direciona para quatro deles: M1 e V1 na atividade “Quanto suco existe em uma laranja?” e, M2 e M3, na atividade “Brigadeiro”. Tais alunos foram escolhidos para análise por participarem dos diálogos de forma espontânea, e por consideramos que tal espontaneidade é relevante no nosso estudo.

A discussão acerca dos dados que compõem nosso material de análise, interpretados a partir de lentes teóricas da modelagem matemática, em particular, dos aportes teóricos de Maaβ (2006), Almeida, Silva e Vertuan (2012), é trazida na próxima seção.

Os tipos de modeladores revelados

Evidenciar os tipos de modeladores revelados em atividades de modelagem matemática nos conduz a selecionar o nosso cenário de investigação. Assim, a atividade “Quanto suco existe em uma laranja?”, que teve seu tema sugerido pela professora por ser uma atividade encontrada na literatura (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012), e a atividade “Brigadeiro” cujo tema foi proposto pelos alunos, a partir do interesse deles durante uma discussão sobre comidas preferidas, são as atividades sob as quais direcionamos o nosso olhar.

Na atividade 1: Quanto suco existe em uma laranja?

A atividade de modelagem matemática cuja temática é "Quanto suco existe em uma laranja?" foi proposta pela professora e corresponde à primeira experiência dos alunos com atividades dessa natureza. As informações contidas no Quadro 1 deflagraram as discussões iniciais e a eleição de problemas a investigar conforme indicado no Diálogo 1.

Quadro 1 - Atividade: Quanto suco existe em uma laranja?

A laranja é um fruto da árvore de laranjeira que possui um porte médio até 8 metros de altura, com seu tronco castanho e a copa em formato arrendodado. Suas frutas são originárias da China e foram trazidas pela primeira vez para o continete americano em 1493 por Cristóvão Colombo. No Brasil foi no ano de 1516 aproximadamente que os portugueses iniciaram suas plantações de laranja e até hoje o Brasil é o maior produtor e exportador de suco de laranja e de subprodutos. Uma fruta rica em vitaminas C que no seu interior tem a formação de gomos com o sabor que pode variar do doce ao levemente ácido. Seu formato e sabor podem variar conforme a sua espécie: laranja-pêra, toranja, laranja-lima, laranja-da-terra, laranja natal, laranja Bahia, laranja valência, laranja folha-murcha, laranja charmute, entre outras.

Fonte: Adaptado (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, p. 142, 2012)

> Diálogo 1
> Prof.: Pessoal, o que a gente pode descobrir com a laranja?
> K1: Contar as laranjas, quantidade.
> M1: Quantas fatias dá para fazer com uma laranja?
> V1: Dá para cortar em quatro ou cinco, dependendo do jeito que você vai cortar.
> M1: Professora, 50 por cento de cada uma dá para cortar aqui e aqui...50 por cento vai dar 4 pedaços.
> Prof.: Vamos formular uma pergunta dessa maneira então.
> M1: Calcular 50 por cento da laranja dará quatro pedaços?
> V1: Dá para fazer acho que uns 6 ou 7 pedaços, porque assim, você corta uma fatia aqui, outra aqui, outra aqui
> [...]
> M1: suco!
> Prof.: isto, o que dá para a gente descobrir do suco da laranja?
> O1: o líquido!
> M1: Quanto de líquido em ml tem uma laranja?
> V1: Pode ser 70 ou 100 ml.
> M1: Professora, uma vez pegamos uma laranja e um copo de medir e fizemos a medida de 100 ml.

A inteiração dos alunos com o tema proposto pela professora toma um direcionamento que no contexto do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática não é o esperado. Por vezes, os alunos se distanciam das informações presentes no Quadro 1 e ficam mais centrados à recorrência de expressões do contexto matemático (cortar, quantidade, dividir, por cento). Nesse sentido, não há uma exploração em torno do tema e das possibilidades de investigação tendo a laranja como mote. Contudo, os alunos elegem dois problemas para estudo: 1) Calcular 50 por cento da laranja dará quatro pedaços?, 2) Quanto de líquido em mL tem uma laranja?

No Diálogo 1 os alunos também apresentam indicativos de respostas (*Professora, 50 por cento de cada uma dá para cortar aqui e aqui...50 por cento vai dar 4 pedaços (M1). Pode ser 70 ou 100 ml (V1). Professora, uma vez pegamos uma laranja e um copo de medir e fizemos a medida de 100 ml (M1)*) para tais problemas, porém não há discussões ou investigações que sustentam essas respostas.

As discussões que versam sobre a busca por respostas para o problema 1 são apresentadas no Diálogo 2.

> Diálogo 2
> M1: 50% pois corta no meio e depois no meio novamente, daí dá 4 pedaços.
> V1: Não dá 50%, pois uma laranja é 100%.
> Prof.: isto, ela inteira é 100%. Mas, para ser 50% cada pedaço, vai ter que dividir em quantas partes a laranja?
> M1: vai ser 1 parte com 50%.
> [...]
> Prof.: Mas ao dividir a laranja em 4 partes, cada uma equivale a 50%?
> M1: Sim! Cortando aqui, vai dar 4 pedaços com 50%.
> V1: não vai dar, pois a laranja é 100 %.
> Prof.: Cada pedaço vai valer quantos % então?
> [...]
> T1: dá 25%.

As discussões enunciadas no Diálogo 2 trazem à tona que os alunos buscam responder ao problema, porém, apresentam compreensões equivocadas a respeito do conceito de porcentagem, no que diz respeito à relação parte-todo. Em certa medida, parece que os alunos se preocupam em responder ao problema de forma aligeirada, sem muita reflexão acerca do que estão analisando (os cortes da laranja). Essa atitude dos alunos também sugere que eles se distanciam do tema e acabam por focalizar a matemática que recorrem para dar uma resposta ao problema. Inferimos que essa atitude deles se relaciona com o tipo de problema elencado para estudo.

Contudo, as falas dos alunos M1 (“*50%, pois corta no meio e depois no meio novamente, daí dá 4 pedaços.*”, “*Vai ser 1 parte com 50%.*” *e* “*Sim! Cortando aqui, vai dar 4 pedaços com 50%.*”) e V1 (“*Não dá 50 %, pois uma laranja é 100%.*” e “*Não vai dar, pois a laranja é 100 %.*”) favorecem as discussões entre esses alunos e provoca-os a pensar no conceito de porcentagem. Suas argumentações, mesmo que de maneira intuitiva, trazem conexões entre o conceito de divisão e porcentagem, já que ‘cortar’ na fala do aluno se refere a dividir.

As discussões entre M1, V1 e a professora incitam um outro aluno a participar do debate e sugerir como resposta que cada pedaço teria 25%. A continuidade das discussões relativas a essa resposta e a aceitação dela é apresentada no Diálogo 3.

> Diálogo 3
> Prof.: Por que 25%?
> V1: Porque são tamanhos iguais.
> M1: São dois de 25 e dois de 25 são 50 e dois de 50 são 100.
> Prof.: Se quiser cortar a laranja em 50 pedaços, que porcentagem representa cada pedaço?
> V1: Se cada quatro pedaços da 100% então 2 pedaços dão 50.
> Prof.: Mas que porcentagem vai dar cada pedaço, ao invés da quantidade de pedaços?
> T1: Professora. vai dar 2%.

V1: Vai dar 25, professora.

V1: Vai dar 25, professora.A declaração de M1: "*São dois de 25 e dois de 25 são 50 e dois de 50 são 100.*", parece estar associada aos seus conhecimentos acerca da situação bem como à resposta ao questionamento da professora. Da mesma forma, a fala de V1: "*Se cada quatro pedaços dá 100 %, então 2 pedaços dão 50.*", retrata uma interpretação próxima a de M1.

Essas duas falas indicam que M1 e V1 compreendem que quando a laranja é dividida em 4 partes, cada parte corresponde a 25% da laranja. Assim, de certo modo, os alunos respondem ao problema 1: Calcular 50 por cento da laranja dará quatro pedaços?, porém, de forma inconsciente pois não fazem relação direta deste problema com a redação do problema enunciado pela professora: Mas ao dividir a laranja em 4 partes, cada uma equivale a 50%?

Embora os alunos, de certo modo, compreendam o problema investigado em associação com a matemática utilizada para responder a ele, quando a professora pergunta "*E se quiser cortar a laranja em 50 pedaços que porcentagem representaria cada pedaço?,* eles apresentam uma resposta que não se relaciona com o questionamento da professora, talvez, por não terem compreendido sua questão.

Diante da ausência de respostas, o debate continua a ser provocado pela professora, conforme apresentado no Diálogo 4.

> Diálogo 4
> Prof.: Uma laranja tem quantos %?
> M1: 100
> Prof.: Se nós cortarmos em 2 pedaços, quantos % tem cada pedaço?
> M1: 50% cada pedaço
> Prof.: E se quiser 25% da laranja, quantos pedaços precisam?
> T1: 4 pedaços
> Prof.: E se a gente quiser 10% quantos pedaços teremos?
> M1: Daí a gente vai contando 10, 20, 30....até chegar no 100
> Prof.: Então, se a laranja inteira é 100% e a gente quer apenas 10%, em quantos pedaços a gente vai cortar?
> Todos: 10, professora.
> M1: É só sempre dividir a porcentagem pela quantidade de pedaços para encontrar o resultado. (sic)

O debate entre a professora e M1 revela que esse aluno compreende o conceito de porcentagem quando traz à tona respostas ("*100.*", "*50% cada pedaço.*" e "*Daí a gente vai contando 10, 20, 30... Até chegar no 100.*") aos questionamentos feitos pela professora. Além disso, há indicação de uma generalização (*É só sempre dividir a porcentagem pela quantidade de pedaços para encontrar o resultado)*.

Generalizações, no contexto da modelagem matemática, podem ser compreendidas como modelo matemático e, nessa atividade, o fato dos alunos terem enunciado essa generalização indica que houve uma sistematização da resposta, ou seja, eles sugerem um modelo matemático que dá forma à solução para o problema.

Ao responderem o problema 1, inferimos que os alunos M1 e V1 estão mais preocupados com questões que dizem respeito ao contexto matemático do problema, neste sentido, na maioria das vezes não levam em consideração o tema abordado na atividade para tirar as conclusões.

Assim, de acordo com a classificação feita por Maaβ (2006), inferimos que tanto M1 quanto V1 neste momento, são modeladores realidade-distante, pois demonstram interesse na abordagem de conceitos matemáticos para resolver o problema em detrimento de analisar a situação que circunda o referido problema. Vale destacar que isso pode ser em decorrência do tipo de problema elencado para estudo.

Uma vez concluído o problema 1, o segundo problema, também enunciado por M1: "Quanto de líquido (suco) existe uma laranja?", passa a ser o foco de investigação. A discussão presente no Diálogo 5 ilustra como os alunos pensam em estratégias para solucionar esse problema.

> Diálogo 5
> M1: Nós temos que furar ela e colocar em um copo com medidas.
> M1: Olha, as meninas estão fazendo de um jeito mais fácil, só cortar a laranja ao meio e espremer.
> O1: Assim está saindo o bagaço junto.
> M1: A gente só precisa tirar o suco da laranja.
> M1: Professora me empresta essa seringa e se tiver a agulha junto também, pois é melhor para fazer a medida.

No Diálogo 5, de modo geral, os alunos indicam modos de obter respostas ao problema e dialogam sobre estratégias para isso. O fato deles associarem a resolução do problema à necessidade de medir a quantidade de suco extraído da laranja denota que os alunos realizam uma transição de linguagem do problema real para um problema matemático.

As afirmações do aluno M1: ("Nós temos que furar ela e colocar em um copo com medidas.", "Olha as meninas estão fazendo de um jeito mais fácil, só cortar a laranja ao meio e espremer.", "A gente só precisa tirar o suco da laranja.", parecem sinalizar que o aluno compreende e analisa o que precisa fazer para responder ao problema e a fala "Professora me empresta essa seringa e se tiver a agulha junto também, pois é melhor para fazer a medida."), denota um caminho por ele adotado na busca por solução para tal problema. A Figura 3 ilustra as estratégias realizadas pelos alunos.

Figura 3 - Estratégias utilizadas pelos alunos para retirar o suco da laranja

Fonte: Acervo da pesquisa

A continuidade das discussões relativas à extração do suco da laranja é apresentada no Diálogo 6.

> Diálogo 6
> V1: A gente já retirou todo o suco da laranja, então agora como vamos contar?
> M1: Só ir somando os valores que anotamos.
> V1: Já temos 45.
> M1: Você está contando de 1 em 1?
> V1: Professora chegou no 48 ml, não vai mais.
> Prof. : Por que 48?
> V1: Porque fizemos assim. 5 + 10 + 15 + 20 e + 3.
> Prof.: Então quantos ml tem?
> V1: 48 ml.
> Prof. : E o outro grupo, quantos ml encontrou?
> T1: 8,7 ml.
> V1: Nossa... quanta diferença nos resultados.
> M1: Nossa professora, mas encontrei um jeito mais fácil de resolver.
> Prof. : Como?
> M1: Só fazer 5x9 e depois somar com 3.
> Prof. : Dá o mesmo resultado?
> M1: Sim professora. Olha 5x9 = 45 e somando com 3 fica igual a 48.

As discussões no Diálogo 6 trazem à tona que os alunos buscam encontrar a quantidade de mL retirada da laranja. As falas do aluno M1 ("*Só ir somando os valores que anotamos.*", "*Você está contando de 1 em 1?*", "*Só fazer 5x9 e depois somar com 3.*" e "*Sim professora. Olha 5x9 = 45 e somando com 3 fica igual a 48.*") e do aluno V1 ("*Porque fizemos assim. 5, 10, 15, 20 e mais 3.*") denotam como os alunos organizam as medidas que eles coletam com vistas a resolver o problema. Em suas falas ficam explicitadas a operação de adição e também a operação de multiplicação, no caso do aluno M1.

A indicação de 8,7 mL (fala de T1 no Diálogo 6) como solução para o problema, embora não problematizada nesse momento da discussão, é retomada posteriormente quando da discussão em torno das soluções apresentadas pelos demais grupos da turma, como nos apresenta o Diálogo 7.

> Diálogo 7
> M1: Como assim, o resultado do outro grupo deu um número bem diferente do nosso?
> V1: Pois olha, a laranja deles era menor que a nossa.
> M1: Não! A laranja do outro grupo era maior.
> Prof. : Então, o que aconteceu será?
> V1: Não sei.
> Prof.: Sempre em uma conta de adição ou subtração de números decimais, as vírgulas precisam estar embaixo de vírgulas, para que a conta dê certo.
> M1: Mas não temos vírgula no 55.
> Prof.: Então pensamos como se a gente tivesse esse valor em dinheiro, ou seja, teríamos R$55,00. E como escrevemos R$55,00 em forma de dinheiro?
> V1: 55 vírgula 00
> M1: Então só colocar 3,2 embaixo do 55,00, com a vírgula embaixo da vírgula.
> Prof.: Isso mesmo pessoal então resolvam aí.

> T1: Deu 58,2 (Faz na calculadora)
> Prof. : Certinho pessoal, ou seja, temos 58,2 ml.

A indagação de M1 (“Como assim, o resultado do outro grupo deu um número bem diferente do nosso?” e “Não! A laranja do outro grupo era maior.”) sugere uma interpretação desse aluno em torno das respostas obtidas e provoca os demais a também participar desse momento de análise das respostas frente ao problema que resolvem. A observação de que os resultados deveriam, em certa medida, se relacionar com o tamanho da laranja corresponde ao processo de interpretação e validação requerido no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Nesse diálogo não fica explicitado como os alunos realizaram os cálculos, contudo, há indicativos do modo como a professora interferiu, a partir da explicação de como realizar a soma entre números inteiros e decimais. A explicação da professora é posteriormente utilizada por T1 ao resolver a operação (55 + 3,2) na calculadora e é por ele aceita como uma resposta ao problema. Da mesma forma, M1 parece compreender a explicação da professora quando enuncia: “Então só colocar 3,2 embaixo do 55,00, com a vírgula embaixo da vírgula”.

Embora sejam encontrados resultados próximos (48 ml e 58,2 ml) para as duas laranjas, as respostas ainda não são validadas e o debate continua, provocado por M1, conforme apresentado no Diálogo 8.

> Diálogo 8
> M1: Mas como 48 e 58,2? O que aconteceu que o outro grupo deu mais mL?
> V1: Porque nós espremermos o bagaço junto.
> Prof. Pesq.: Será? Mas será que com o bagaço não daria maior quantidade de mL?
> M1: Na verdade é, porque nossa laranja é menor que a do outro, veja o tamanho da laranja deles.
> Prof. Pesq.: Então se a laranja de vocês é menor o que aconteceu?
> O1: Deu menos líquido.
> Prof. Pesq.: Mas o que isso tem a ver será?
> M1: Os tamanhos das laranjas e dos sucos se condizem. Por exemplo, quanto maior a laranja, mais suco tem.
> Prof. Pesq.: Então quanto de líquido tem uma laranja?
> V1: Depende do tamanho, veja que a nossa laranja era menor e deu 48 mL e a do outro grupo deu 58,2 porque a laranja era maior.
> M1: Não temos um valor certo pra isso.
> Prof. Pesq.: Isso mesmo pessoal.

Os resultados (48 ml e 58,2) parecem não satisfazer como resposta para o problema de quanto de suco tem uma laranja, quando o aluno M1 questiona “*Mas como 48 e 58,2? O que aconteceu que o outro grupo deu mais mL?*”. Esses questionamentos de M1 parecem indicar que esse aluno esperava que a solução para o problema fosse uma resposta única. Contudo, a fala do aluno V1 (“*Porque nós espremermos o bagaço junto*”) sinaliza uma tentativa de convencer seu colega de que sua resposta também é válida.

De fato, o aluno V1 parece convencer a M1, uma vez que M1 afirma: “*O tamanho da laranja e do suco se condizem. Por exemplo, quanto maior a laranja, mais suco tem*”, comunicando a diferença entre os resultados e a aceitabilidade de ambas as respostas.

Da mesma forma, a fala de V1 "*Ah professora, depende do tamanho, veja que a nossa laranja era menor e deu 48 ml e a do outro grupo deu 58,2 porque a laranja era maior.*" retrata uma comunicação de resultado, próxima a M1, sinalizando que um problema em modelagem matemática não precisa ter uma única resposta ("*É professora, não temos um valor certo pra isso.*").

Ao responderem o problema 2, inferimos que os alunos M1 e V1 estão levando em consideração tanto elementos que dizem respeito a conceitos matemáticos bem como características da situação em estudo. Assim, de acordo com a classificação feita por Maaβ (2006), inferimos que tanto M1 quanto V1, são modeladores reflexivos, pois lidam com aspectos da situação em articulação com os conceitos matemáticos utilizados na resolução do problema.

Na atividade 2: Brigadeiro

Nessa atividade de modelagem matemática, cujo tema foi proposto pelos alunos, a inteiração acerca do tema se deu a partir de um conjunto de informações por eles coletadas com vistas à eleição de um problema a investigar. O Diálogo 1 retrata esse acontecido.

> Diálogo 1
> M2: Primeiro temos que achar uma receita de brigadeiro.
> M3: Vamos fazer no micro-ondas ou no fogão?
> M2: fogão!
> M3: É indiferente, mas acho que no micro-ondas é mais rápido.
> Prof.: Vamos pesquisar as receitas antes, aí vocês decidem.
> M1: Vamos fazer o de micro-ondas, é melhor, podemos fazer aqui na sala mesmo.
> M2: Então vamos.
> M3: Vamos colocar os ingredientes como pede a receita.
> Prof.: Agora com a receita já preparada, vamos formular nossos problemas.
> M2: Dá para fazermos algo do tipo: quanto vou gastar de tempo.
> M3: Ou quantidade em valor, professora.
> M1: Professora, pensamos em fazer a diferença do comprado para o fabricado.
> M3: Ou tipo mais de uma receita também professora, ou ainda quanto tempo que gasta.
> M2: Boa ideia, vamos fazer bem isso mesmo.
> M3: Então vou fazer diferente, vou fazer um problema para nós acharmos o valor gasto para fabricar e qual que sai mais em conta.
> T1: Qual compensa mais.

As falas de M2 e M3, respectivamente "Primeiro temos que achar uma receita de brigadeiro" e "É indiferente, mas acho que no micro-ondas é mais rápido", "Vamos colocar os ingredientes como pede a receita" sugerem que eles estão se inteirando de aspectos do tema proposto e fazendo inferências acerca das informações que coletaram, uma vez que nessas falas contém sugestões deles acerca do tema que investigam.

A discussão acerca do tema requer dos alunos coletar informações sobre o tempo de preparo de uma receita de brigadeiro no micro-ondas. Para registrar o tempo, os alunos fabricam uma receita de brigadeiro e, simultaneamente, acompanham esse tempo com o uso de um cronômetro.

A Tabela 1 indica o tempo de preparo do brigadeiro em cada processo e sugere que os alunos estão compreendendo aspectos em torno do tema para formularem um problema a resolver associado à ação de coletar e organizar os dados em uma tabela.

Tabela 1 - Informações coletadas pelos alunos durante o preparo de uma receita de brigadeiro

Modo de preparo	Tempo de preparo
Colocar os ingredientes e mexer	1 minuto
Cozinhar no Micro-ondas	3 minutos
Retirar e mexer	1 minuto
Cozinhar novamente	3 minutos
Cozinha novamente	3,5 minutos
Mexer até formar uma massa lisa e brilhante	1 minuto

Fonte: Autoras

A obtenção desses tempos de preparo do brigadeiro evidencia que os alunos interagem com o contexto da situação à medida em que se inteiram do tema. Ainda, esses dados propiciam ideias iniciais, de M2 ("Quanto tempo vou gastar para preparar o brigadeiro? Qual a diferença do brigadeiro comprado para o fabricado?" e M3 ("Quanto tempo vou gastar para fabricar mais de uma receita? Qual o valor gasto para fabricar uma receita de brigadeiro e qual ficaria mais viável? "), visando a delimitação de um problema.

Essas ideias iniciais conduzem à definição de dois problemas[4] a investigar: 1) Sabendo que para fazer uma receita de brigadeiro no micro-ondas, considerando apenas o tempo de cozimento, gasta-se, de acordo com a Tabela 1, 9,5 minutos. Quanto tempo gastarei para fabricar 20 receitas de brigadeiro? 2) Qual compensa mais: comprar os ingredientes para fabricar o brigadeiro ou comprar a lata pronta? O fato de os alunos terem recorrido à elaboração de questões auxiliares para estruturar esses dois problemas denota o interesse deles sobre o tema em foco.

Ainda, as questões auxiliares, além de possibilitarem a estruturação do problema, indicam que os alunos M2 e M3 transitam da situação em linguagem natural para a linguagem matemática, uma das ações requeridas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

O problema 1 elencado pelo aluno M2 passa a ser foco de investigação da turma. A discussão apresentada no Diálogo 2 ilustra o processo de busca por solução para esse problema.

Diálogo 2
Prof.: E agora pessoal, vamos resolver os problemas.
M3: É fácil professora, uma conta de multiplicação.
M2: É vezes professora
Prof.: Então façam aí, cada grupo em seu papel.
M2: Mas não dá para resolver pela regra de três?
Prof.: Temos grandezas diferentes?
M3: Uma é o tempo, professora.
T1: Outra é a quantidade.
Prof.: Quantidade do que?
M3: Tempo.

[4] Contudo, neste artigo, pela quantidade de páginas abordaremos somente o problema 1.

> Prof.: Então qual seria a outra?
> M3: Receitas, não é professora?
> Prof.: Leiam nosso problema e pensem: será que pode ser quantidade de receitas e o tempo?
> M3: Acho que é isso mesmo, professora

Nesse diálogo vem à tona mobilização e uso de conceitos e técnicas matemáticas com vistas à resolução do problema. Quando os alunos M3 e M2, respectivamente, afirmam "É fácil professora, uma conta de multiplicação." e "Mas não dá para resolver pela regra de três?", identificam as grandezas necessárias e as organizam para desenvolver a "regra de três", ou seja, mobilizam, mesmo que de maneira intuitiva, conhecimentos de proporcionalidade. O Diálogo 3 contém as discussões dos alunos quando visam solucionar o problema em questão.

> Diálogo 3
> M2: Fica assim: uma receita equivale a 9 minutos e 30 segundos. E 20 receitas, equivalem a quantos? Aí coloca o x, porque não sabemos o valor.
> Prof.: Isto mesmo. Quando não sabemos vamos sempre utilizar uma letra.
> T1: Agora só fazer conta de vezes, não é?
> M2: Coloca 1 com x e 20 com 9 minutos e meio e acha o valor.
> T1: Mas quanto dá x?
> M2: Não sei, isso que estamos procurando.
> M2: Então vai ficar 1.x=20.9:30. Mas como vamos fazer essa conta?
> M3: 1 vezes x é 1x.
> M2: E 20 vezes 9 minutos e 30, vai dar 10!
> Prof.: E como você fez?
> M2: Somei 90 mais 90 que é 180.
> Prof.: E por que 90?
> M2: Pois olha professora, se fosse 10 vezes 9 dava 90 e se eu somar 90 mais 90 porque são 20 que é a quantidade de receitas tenho 180.
> Prof.: Certo.

As discussões empreendidas entre os alunos e a professora revelam que o aluno M2 interpreta a situação real em um contexto matemático: "*Fica assim: uma receita equivale a 9 minutos e 30 segundos. E 20 receitas, equivalem a quantos? Aí coloca o x, porque não sabemos o valor.*", "*Coloca 1 com x e 20 com 9 minutos e meio e acha o valor.*" e "*Então vai ficar 1.x=20.9:30. Mas como vamos fazer essa conta?*" Ao mesmo tempo, M2 resolve as operações matemáticas que são requeridas pela situação (*Mas como vamos fazer essa conta?*), nas afirmações: "*E 20 vezes 9 minutos e 30, vai dar 10!*" e "*Somei 90 mais 90 que é 180.*" sinalizando a utilização de procedimentos matemáticos.

O resultado matemático: 180, apresentado por M2 é complementando na afirmação: "*Pois olha professora, se fosse 10 vezes 9 dava 90 e se eu somar 90 mais 90 porque são 20 que é a quantidade de receitas tenho 180.*" quando ele esclarece como fez a resolução. Todo esse processo de discussão dos alunos em torno dos aspectos matemáticos com vista a solucionar o problema em estudo é alicerçado no contexto matemático, uma vez que suas discussões focalizam aspectos da Matemática. O debate acerca do resultado matemático continua e aparece sintetizado no Diálogo 4.

> Diálogo 4
> M3: Mas é 9 e meio, professora.
> M2: 9 minutos e 30 segundos.
> [...]

M3: Professora, se eu contar assim: 2+2+2+2+2=10 e daí soma com 180.
M2: 180 minutos, professora.
Prof..: Tá, mas e aqueles 30 segundos?
M2: Com aqueles, professora.
Prof. : Como você fez?
M3: Os 30 segundos multiplicados por 20, no final vai dar 10 minutos.
Prof.: Como chegou nesses 10 minutos?
M3: Eu só multipliquei 30 por 20 e depois dividi o resultado por 60.
Prof..: Por que 60?
M3: São os minutos, professora.
Prof.: Certo. Então quantos minutos vamos gastar para fazer 20 receitas de brigadeiro?
M3: 190 minutos.
T1: Encontramos 186.
Prof. : E os outros grupos conseguiram?
E1: 186 também.
M1: Nós também achamos 186.
Prof.: Tivemos diferentes respostas, e agora?
M2: 186, professora, a maioria deu isso.

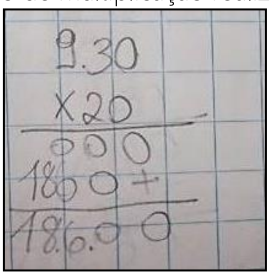
Como as escolhas relativas aos procedimentos para resolver o problema (Diálogo 3) acabam por não ser aceitas entre os alunos, eles continuam a discussão no Diálogo 4 e as declarações do aluno M3 "Professora, se eu contar assim: 2+2+2+2+2=10 e daí soma com 180." e "Os 30 segundos multiplicados por 20, no final vai dar 10 minutos." parecem satisfazer ao problema.

Tais afirmações, associadas aos conhecimentos do aluno acerca da situação (particularmente, ao problema) e à necessidade de explicar e justificar a matemática envolvida no processo de resolução, indicam que os alunos transitam apenas no contexto matemático, sem muita (ou qualquer) articulação com a situação em foco.

Os conceitos matemáticos de adição e multiplicação, utilizados por M3, e explicitados na fala: "Eu só multipliquei 30 por 20 e depois dividi o resultado por 60.", "São os minutos, professora." e "190 minutos." são explicados a partir do interesse de comunicar e argumentar sobre o resultado que obteve e na tentativa de convencer seus colegas que essa é a resposta correta para o problema.

Não convencido que essa é a resposta para o problema (190 minutos) e tentando entender porque a resposta correta não deveria ser 186 minutos, M2 diz: "186 professora, a maioria deu isso." e alicerça seu comentário na operação ilustrada na Figura 4. Nesse momento da atividade as discussões dos alunos focalizam as soluções por eles obtidas e, de certo modo, a validade de somente uma delas.

Figura 4 - Operação de multiplicação realizada pelo aluno M2



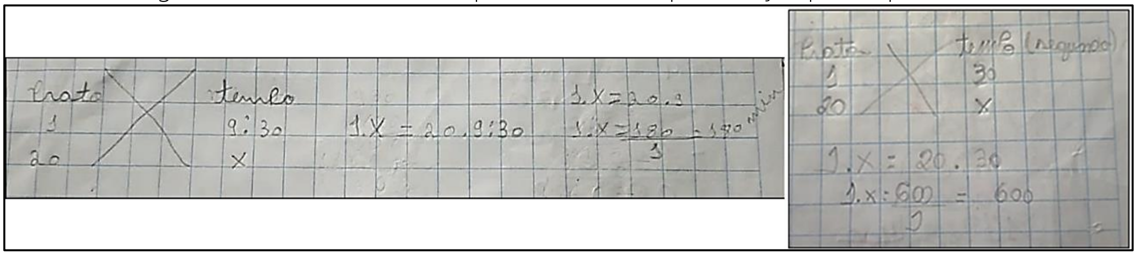
Fonte: Acervo de pesquisa

Quando M2 apresenta o modo como resolveu a multiplicação (Figura 4), M3 inicia um novo debate, conforme apresentado no Diálogo 5.

> Diálogo 5
> M3: Temos que deixar tudo em segundos, se não vai dar errado.
> Prof.: E como fazemos?
> M3: Regra de três.
> M3: Até agora só fizemos dos 9 minutos, ainda faltam dos 30 segundos.
> Prof.: Mas como vamos fazer?
> M2: A gente fez conta de vezes, 30 vezes 20 e dá 600.
> M3: Nós fizemos pela regra de três.

Nesse diálogo M3 compartilha seus conhecimentos matemáticos quando declara: "Temos que deixar tudo em segundos, se não vai dar errado." e "Até agora só fizemos dos 9 minutos, ainda faltam dos 30 segundos." e quando apresenta sua resolução (Figura 5). Essas colocações de M3 se ancoram no contexto matemático, uma vez que os alunos recorrem apenas a aspectos da matemática para obter uma resposta.

Figura 5 - Cálculos realizados por M3 na busca por solução para o problema



Fonte: Acervo de pesquisa

O resultado relativo ao cálculo dos segundos, obtido por M3 (Figura 5) provoca a discussão apresentada no Diálogo 6.

> Diálogo 6
> Prof.: O que significa esses 600?
> M2: Minutos.
> M3: Não são segundos professora? Porque nós estávamos calculando só dos 30 segundos.
> Prof.: Isso.
> M2: Agora falta somar tudo.
> Prof..: E eu posso somar minutos com os segundos?
> M3: Deixar tudo em minutos.
> M2: Ou em segundos, porque 1 minuto tem 60 segundos, aí é só fazer 600 divididos por 60.
> M3: 600 divididos por 60 são 10 minutos.
> M3: Agora é só somar 10 minutos mais os 180 encontrados, que teremos o total de 190 minutos.

O questionamento da professora possibilita ao aluno (M3) reconhecer o significado do número "600", ou seja, o que ele representa no contexto do problema estudado. Esse questionamento também favorece que os alunos reconheçam qual a resposta válida para o problema. Tanto as declarações de M3: "Deixar tudo em minutos." e "600 divididos por 60 são 10 minutos.", como as de M2: "Agora falta somar tudo." e "Ou em segundos, porque 1 minuto tem 60 segundos, aí é só fazer 600 divididos por 60." sinalizam que eles reconhecem que ainda precisam continuar a resolver para obter uma resposta para o problema.

Para concluir a resolução do problema, o aluno M3 declara "Agora é só somar 10 minutos mais os 180 encontrados, que teremos o total de 190 minutos". Contudo, o próprio aluno M3 sente a necessidade de continuar a discussão em torno do resultado obtido (Diálogo 7).

> Diálogo 7
> M3: Professora, mas acho que temos que ter horas.
> Prof. : E quantas horas são?
> M1: Umas 4 horas.
> M2: 3 horas e uns quebrados. (faz na calculadora)
> Prof.: O que são esses quebrados?
> M2: Eu fiz na calculadora: 190 dividido por 60 temos o valor de 3,1666666 e mais um monte de número 6.
> [...]
> M3: Professora vai dar 3 horas e 10 minutos.
> Prof.: Como você fez?
> M3: Só pensar, 3 horas são 180 minutos e mais 10 minutos que restaram.
> Prof.: Isto mesmo. Então resolvemos nosso problema?
> [...]
> M3: Sim. Mas esse tempo é só para cozinhar, daí tem mais o tempo de abrir as latas de leite condensado, colocar os ingredientes e ainda enrolar.
> Prof.: Sim, então este é um tempo aproximado, não exato.

A opção do aluno M3, de obter o resultado em horas, revela o interesse desse aluno em comunicar o resultado obtido, utilizando outra unidade de medida para o tempo. Ao expressar esse interesse, há indicativos de que M3 sugere ser mais adequado usar a unidade de medida de horas para comunicar o resultado, já que essa é a mais usual no cotidiano das pessoas. Essa transformação de unidades de medida, entretanto, requer do aluno outros cálculos, como: "*Eu fiz na calculadora: 190 dividido por 60 temos o valor de 3,1666666 e mais um monte de número 6.*" e "*Só pensar, 3 horas são 180 minutos e mais 10 minutos que restaram*".

Por fim, quando M3 declara: "*Mas esse tempo é só para cozinhar, daí tem mais o tempo de abrir as latas de leite condensado, colocar os ingredientes e ainda enrolar.*", sugere que o resultado matemático pode não conter especificidades do contexto real. Essa afirmação também depõe que esse aluno realiza uma interpretação e validação da resposta, no sentido de analisá-la quanto sua adequação ao problema real em estudo.

Ao final do desenvolvimento desta atividade, inferimos que os alunos M2 e M3 levam em consideração os conceitos matemáticos abordados para resolver o problema bem como realizam uma interpretação no sentido de analisar a adequação da resposta ao problema real em estudo. Nesse sentido, de acordo com a classificação feita por Maaβ (2006), inferimos que M2 e M3 são modeladores reflexivos, pois lidam com aspectos da situação em articulação com os conceitos matemáticos utilizados na resolução do problema.

Considerações finais

Retomando nosso objetivo de pesquisa, que consiste em evidenciar tipos de modeladores revelados em duas atividades de modelagem matemática que foram desenvolvidas por alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental, tecemos algumas de nossas considerações.

Os tipos de modeladores evidenciados nas duas atividades foram: modelador realidade-distante e modelador-reflexivo. No caso da atividade cujo tema é a laranja em que foram abordados os problemas 1) Calcular 50 por cento da laranja dará quatro pedaços?, 2) Quanto de líquido em ml tem uma laranja? Destacamos que os modeladores realidade-distante (M1 e V1) na abordagem do problema 1, pode ter acontecido pela característica do problema que foi abordado pela professora.

Trata-se de uma primeira experiência tanto da professora como dos alunos com atividades de modelagem matemática e, neste sentido, a condução dada pela professora pode ter colocado o foco mais nos aspectos matemáticos do problema. Em alguns momentos tanto os alunos como a professora se distanciaram da situação abordada no estudo. Já com relação ao problema 2, consideramos que os alunos M1 e V1 se envolveram tanto com a situação da realidade como com os aspectos relacionados a matemática, denominando-os assim como modeladores reflexivos.

Já no que diz respeito a atividade cuja tema era Brigadeiro, por se tratar de um tema de interesse dos alunos, evidenciamos nesta atividade, que os alunos M2 e M3 são modeladores reflexivos. No desenvolvimento dessa atividade os alunos se envolveram tanto com a situação da realidade como com aspectos relacionados a matemática. Talvez o tema em estudo tenha influenciado o envolvimento dos alunos e favorecido a evidência desse tipo de modelador.

Durante o trabalho com modelagem matemática, professor e alunos precisam ter comportamento ativo em todo o processo investigativo demandado no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Assim, a interação entre os alunos e a intervenção da professora no desenvolvimento das duas atividades influenciaram os tipos de modeladores revelados, pois a depender das questões levantadas ora os alunos podem focar mais em aspectos matemáticos ora em aspectos que dizem respeito a situação da realidade bem como em aspectos que relacionam ambos. Além disso, concluímos que os tipos de modeladores revelados podem contribuir para o professor pensar em ações que façam um aluno evoluir de modelador menos interessados para modeladores reflexivos.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *VYDIA*, Santa Maria, v. 42, n. 2, p. 121-145, 2022.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. *Zetetiké*, Campinas, v. 18, número temático, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P. Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. *REnCiMa*, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 1-27, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, E. M. V.; SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto online. *ALEXANDRIA (UFSC)*, Florianopolis, v. 14, p. 383-406, 2021.

BORROMEO FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, Berlin, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BORSSOI, A. H. *Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias*: articulações em diferentes contextos educacionais. 2013. 256f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

CASTRO, É. M. V. *Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática*. 2017. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2017.

FONTANINI, M. L. C. *Modelagem matemática X aprendizagem significativa*: uma investigação usando mapas conceituais. 2007. 248f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

KLÜBER, T. E. *Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática*. 2012. 396p. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MAAβ, K. What are modelling competences?. *ZDM*, Berlin, v. 38, ed. 2, 2006.

TAMBARUSSI, C. M.; KLÜBER, T. E. Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática. *Educação Matemática Pesquisa (Online)*, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 209-225, 2014.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. W. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em atividades de Modelagem Matemática. *Revista Paranaense de Educação*, Campo Mourão, v. 5, p. 83-105, 2016.

VERONEZ, M.R.D.; CASTRO, E.M.V.; MARTINS, M.A. Uma Investigação Acerca do Problema em Atividades de Modelagem Matemática. *VIDYA*, Santa Maria, v. 38, n. 1, p. 223-235, jan./jun., 2018.

VERONEZ, M. R. D; ALMEIDA, L. M. W. Sobre o papel dos signos em atividades de modelagem matemática. *REnCiMa*, São Paulo, v. 8, p. 142-157, 2017.

VERONEZ, M. R. D. As funções dos signos em atividades de modelagem matemática. 2013. 176p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E. Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática. 2013. 247p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E; ALMEIDA, L. M. W. . Modelagem Matemática na Educação Básica: um passeio pelas diferentes séries. In: VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2009, Londrina. Anais [...]. Londrina: UEL, p. 1-15, 2009.

ZANIM, A. P. Um método para a análise de competências dos alunos em atividades de modelagem matemática. 2021. 136f. Tese de doutorado (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.