

ENSINO DE FRAÇÕES BASEADO NO PARADIGMA DE EQUIVALÊNCIA DE ESTÍMULOS¹
TEACHING PROPORTION BASED ON THE STIMULUS EQUIVALENCE PARADIGM

ANTONIO CARLOS GODINHO DOS SANTOS
UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS, BRASIL

CARLOS EDUARDO CAMESCHI
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, BRASIL

ELENICE S. HANNA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA SOBRE COMPORTAMENTO, COGNIÇÃO E ENSINO, BRASIL

RESUMO

Alunos brasileiros do sexto ano do ensino fundamental frequentemente não são capazes de resolver problemas que requerem o conceito de proporção e frações equivalentes. O presente estudo verificou se o ensino de relações condicionais entre estímulos fracionários numéricos e pictóricos ensinaria o conceito de proporção. Dez alunos da quinta série, com dificuldade em solucionar problemas fracionários, aprenderam a escolher frações numéricas correspondentes aos modelos pictóricos ou numéricos equivalentes em tarefa apresentada no computador. Os numeradores dos estímulos de comparação foram os mesmos para cinco participantes (E1) e variaram para outros cinco (E2). Todos os participantes aprenderam as relações ensinadas e demonstraram relações de simetria e transitividade/equivalência: três classes de frações (1/3, 1/4 e 1/5) com três membros cada (duas frações numéricas e uma pictórica) foram formadas. Entretanto, a expansão das classes formadas não ocorreu para a maioria dos estudantes após ensino adicional de relações entre novas frações numéricas e as pictóricas originais 1/3, 1/4 e 1/5. Nos testes de operante generalizado com novas proporções avaliadas ao longo do estudo, os participantes mostraram escores acima de 50% de acertos. Avaliações gerais em forma de prova de múltipla escolha e aplicadas em sala de aula mostraram ganhos significativos para os sujeitos experimentais, mas não para participantes de controle (GC). Escores nas condições de ensino e de teste foram, em geral, mais altos para E1 do que para E2. O efeito facilitador do procedimento e da manutenção do numerador sobre o estabelecimento de classes de frações com três elementos, mas não na ampliação das classes, requer investigações adicionais. O presente estudo mostrou a utilidade de um método baseado no paradigma de equivalência para o ensino de um dos conceitos matemáticos que muitas crianças têm dificuldade de aprender.

Palavras-chave: controle de estímulos, equivalência de estímulos, aprendizagem de frações, controle condicional, conceito de proporção.

ABSTRACT

Fifth grade Brazilian students frequently fail to solve problems which the concept of proportion with relative quantity is required. The present study verified whether teaching conditional relations between multiple exemplars of pictorial and numerical fraction stimuli could establish the concept of proportion. Ten fifth grade students with insufficient performance to solve problems of fraction learned to choose numeric fractions conditionally to a pictorial sample or other equivalent numerical fraction in a desktop computer. The numerators of all comparison stimuli were the same for five participants (E1) and varied for other five subjects (E2). All subjects learned relations between fractions directly trained and showed emergence of symmetric and transitive/equivalence relations: three classes of fraction (1/3, 1/4 and 1/5) with three members each (two numeric and one pictorial fractions) were formed. However, the expansion of the formed classes did not occur for the majority of the subjects after additional training of relations between new numeric fractions and the original pictorial fractions 1/3, 1/4 and 1/5. Assessments of generalized operant with new proportions repeated throughout the study showed scores over 50% correct. Global evaluations conducted as multiple choice exams and applied in classroom setting showed significant gains for experimental subjects but not for the control group (GC). Scores of training and test conditions for E1 were, in general, higher than for E2. The facilitative effect of the procedure and constant numerator on developing three-member equivalence classes of fractions, but not on the expansion of classes requires further investigation. The present study showed the utility of a methodology based on the stimulus equivalence paradigm to teach one of the math concepts which children often failure to learn with traditional methods.

Keywords: stimulus control, equivalence stimulus, learning fractions, conditional control, concept of proportion.

¹ Trabalho derivado de dissertação de mestrado defendida e aprovada no Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília do primeiro autor sob orientação de Elenice S. Hanna. Durante o período no qual a redação do manuscrito foi realizada, a última autora era bolsista de produtividade do CNPq, contou com financiamento do CNPq (Processo 400359/2008-1) e era pesquisadora do Instituto de Ciência e Tecnologia sobre Comportamento, Cognição e Ensino, apoiado pela Fapesp (Processo 08/57705-8) e pelo CNPq (Processo 573972/2008-7). E-mails: acgodinhos@gmail.com, cameschi@gmail.com, elenicehanna@gmail.com

O desenvolvimento de expressões numéricas possibilitou mudanças históricas em vários níveis de relacionamento entre os homens (Lima, 1986). *Proporção, razão e fração* exemplificam formas atuais de expressões de números racionais. A compreensão adequada do conceito de proporção e da natureza relativa entre diferentes medidas é indispensável para a solução de diversas tarefas do dia a dia da sociedade moderna (Carraher, Carraher, Schliemann, & Ruiz, 1986; Spinillo, 1993).

A relação entre partes marcadas e o total de partes em que um inteiro (a unidade) foi dividido, quando as quantidades envolvidas são de mesma natureza, é denominada *fração*. O termo *razão* refere-se à relação entre duas unidades ou conjuntos de unidades, quando as quantidades envolvidas em uma medida são de naturezas diferentes (Carraher, Carraher, & Schliemann, 1986; Quintero, 1987; Skypek, 1984). Relações entre razões ou frações são chamadas de *proporções*. Diz-se que A/B e C/D são proporcionais se $A \times D$ for igual a $B \times C$. Assim, as frações $2/3$ e $12/18$ são proporcionais, uma vez que 2×18 é igual a 3×12 .

Segundo Carraher *et al.* (1986), o conceito de magnitude relativa relaciona-se diretamente com o conceito de proporção. Isso significa que duas frações diferentes e que possuam o mesmo valor matemático são proporcionais. Duas frações proporcionais designam um mesmo número fracionário e podem ser chamadas de frações equivalentes. No exemplo anterior, $2/3$ e $12/18$ são frações matematicamente proporcionais e equivalentes.

As frações podem ser expressas nas formas literal ou relativa. Uma fração é denominada literal ou absoluta quando o numerador

corresponde ao número de elementos selecionados de um conjunto, e o denominador, ao número total de elementos do conjunto. Quando não há correspondência direta e as medidas são proporcionais, o conjunto é representado por uma fração relativa e envolve o conceito de magnitude relativa (Carraher *et al.*, 1986; Behr, Wachsmuth, & Post, 1988).

Alguns estudos relatam que crianças de quinta série (atualmente sexto ano) do ensino fundamental apresentam dificuldade na compreensão do conceito de proporção, como, por exemplo, quando resolvem problemas que apresentam frações expressas de forma relativa (Carraher & Schliemann, 1992; Santos, 1999; Spinillo, 1993). Carraher, Carraher e Schliemann (1982) observaram que crianças e adolescentes, quando fora do contexto escolar, optam por usar métodos próprios na solução de problemas, em detrimento das estratégias aprendidas na escola. A maior dificuldade é compreender que uma fração pode ser representada pela magnitude relativa entre o numerador e o denominador, e que nenhum dos termos se refere às quantidades absolutas ou literais.

Diferentes sugestões são encontradas na literatura para o ensino do conceito de proporção. Por exemplo, Bezuk (1988) sugere o uso de material manipulativo; Vance (1992), Hiebert (1987), Schliemann, (1986) e Thompson (1994) analisaram a utilização de material concreto e pictórico; e Chiose (1984) propõe acentuar o ensino com material gráfico. Outros estudos questionam a utilidade das regras e estratégias ensinadas pela escola na solução de problemas que necessitam do conceito de proporção (Carraher *et al.*, 1986; Hart, 1993a, 1993b; Spinillo, 1992, 1993; Tinoco & Lopes, 1994). Em to-

dos os trabalhos, as dificuldades observadas na aprendizagem do conceito de proporção preocuparam-se com o desenvolvimento de métodos mais eficazes para seu ensino.

O treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos² (Sidman & Tailby, 1982; Sidman, 1985, 1986, 1990, 1992) mostrou-se eficiente para aquisição de leitura em sujeitos com história de fracasso escolar (de Rose, Souza, Rossito, & de Rose, 1989). Repertórios complexos, como a leitura, são analisados como uma rede de relações entre estímulos e entre estímulos e respostas (Sidman & Cresson, 1973; Albuquerque & Melo, 2005). O ensino de pelo menos duas relações entre estímulos envolvendo palavras ditadas e impressas e seus referentes representados em figuras tem como efeito a emergência de relações não treinadas. O ensino das relações básicas é geralmente realizado a partir do procedimento de *pareamento ao modelo*. Esse procedimento envolve a apresentação de um estímulo modelo (por exemplo, palavra ditada do conjunto A) que define qual dos estímulos de comparação apresentados simultaneamente (por exemplo, figuras do conjunto B ou palavras impressas do conjunto C) deve ser escolhido para que a resposta de seleção seja seguida por reforçamento. Variando-se o modelo e os aspectos irrelevantes dos estímulos de comparação em várias tentativas, é possível ensinar relações entre eventos (AB e AC) com o procedimento de pareamento ao modelo. A partir do ensino dessas relações, diz-se que os estímulos se tornaram equivalentes, segundo Sidman e Tailby (1982), quando suas funções

como modelo e comparação são intercambiáveis (observa-se a emergência de relações simétricas BA e CA) e relações novas entre os estímulos oriundos de treinos diferentes emergem (relações transitivas CB e BC).

O treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos fornece um sistema funcional útil e econômico no ensino de diversos comportamentos complexos (Ninness, Rumph, McCuller, Harrison, Ford, & Ninness, 2005; Stromer, Mackay, & Stoddard, 1992). Poucos trabalhos, entretanto, verificaram sua aplicabilidade no campo da matemática, que requer a aprendizagem de diversas relações arbitrárias entre nomes, símbolos e eventos e em que geralmente se espera a emergência de relações não treinadas, bem como a generalização e/ou transferência para novas situações e respostas.

Os estudos que utilizaram procedimentos de ensino de discriminações condicionais para ensinar repertório matemático tiveram como temática: o conceito de número (Prado & de Rose, 1999; Carmo & Prado, 2004), os conceitos de “mais que” e “menos que” (Barnes-Holmes, Barnes-Holmes, Smeets, Strand, & Friman, 2004), a equivalência entre frações e decimais (Lynch & Cuvo, 1995, Leader & Barnes-Holmes, 2001) e correspondências entre gráficos e fórmulas (Ninness *et al.*, 2005; Ninness, Barnes-Holmes, Rumph, McCuller, Ford, Payne, Ninness, Smith, Ward, & Elliott, 2006).

Como os conceitos de proporção e de equivalência matemática de frações requerem a classificação e o agrupamento de símbolos numéricos e geométricos dentro de uma mesma classe, o treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de

² O termo paradigma de equivalência de estímulos foi utilizado aqui porque equivalência de estímulo é o modelo orientador na definição das etapas de treino e testes do estudo.

estímulos pode ser uma alternativa promissora para o ensino desses conceitos. Lynch e Cuvo (1995) treinaram relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos para ensinar relações entre números fracionários e números decimais para estudantes com baixo desempenho na solução de problemas que envolviam frações. Os estudantes foram inicialmente ensinados a escolher figuras correspondentes a razões fracionárias apresentadas como modelo e, em seguida, a escolher valores decimais condicionalmente às figuras correspondentes. Os autores relataram a emergência de relações entre razões fracionárias e valores decimais e a generalização, apesar de limitada, para outras frações. Esses resultados foram replicados em estudo subsequente realizado por Leader e Barnes-Holmes (2001) com um procedimento de ensino com treino respondente (emparelhamento da fração numérica e figura e da figura e número decimal) e teste de discriminação condicional.

O objetivo do presente trabalho foi avaliar o efeito do treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência na aquisição do conceito de equivalência matemática entre frações. Como objetivo específico, o estudo verificou o efeito de variar ou não o numerador das frações que compunham os estímulos de comparação.

MÉTODOS

Participantes

Participaram 20 alunos de quinta série do ensino fundamental da rede pública, com idades entre 11 e 17 anos, sendo nove do sexo masculino e 11 do sexo feminino. Os participantes tiveram baixo desempenho em

teste coletivo, aplicado na forma de prova de múltipla escolha denominado avaliação inicial (detalhes descritos no procedimento).

Equipamento e material

Um microcomputador Bull, 386SX, com monitor SVGA de 14", acompanhado por um *mouse* de duas teclas e um *software* programado em linguagem Pascal, apresentou os estímulos e registrou as respostas em todas as condições experimentais.

Guloseimas, objetos de uso pessoal e brinquedos, dispostos em forma de "lojinha", foram utilizados no experimento como estímulos reforçadores.

Local

As sessões experimentais foram realizadas no contraturno do horário de aula dos alunos em uma sala do Laboratório de Análise Experimental do Comportamento da Universidade Católica de Goiás (Laec). A sala tinha dimensões aproximadas de 6 m × 6 m, iluminação natural e artificial e ventilação natural. Foram conduzidas cinco sessões semanais com duração entre 20 e 30 minutos, de acordo com a disponibilidade dos sujeitos. As avaliações iniciais foram aplicadas na sala de aula de uma escola da rede pública de ensino de Goiânia. As demais condições aconteceram individualmente no Laec.

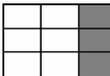
Estímulos

Os estímulos visuais consistiram em frações representadas como proporção e figuras que representavam as frações. Os estímulos foram organizados em 11 diferentes conjuntos de três elementos cada um. Seis conjuntos foram usados nos treinos e cinco nos Testes de Generalização (Tabela 1).

Tabela 1

Organização dos conjuntos de estímulos de treino e generalização utilizados nas condições experimentais. O conjunto A refere-se às formas pictóricas das frações.

Os demais conjuntos foram apresentados como frações numéricas

Conjunto	Grupo E1 Estímulos			Grupo E2 Estímulos		
	1	2	3	1	2	3
TREINO						
A						
B	1/3	1/4	1/5	3/9	2/8	1/5
C	2/6	2/8	2/10	4/12	5/20	3/15
D	3/9	3/12	3/15	1/3	4/16	5/25
E	4/12	4/16	4/20	5/15	1/4	2/10
F	5/15	5/20	5/25	2/6	3/12	4/20
GENERALIZAÇÃO						
G	1/7	1/6	1/2	1/7	1/6	1/2
H	2/14	2/12	2/4	2/14	2/12	2/4
I	3/21	3/18	3/6	3/21	3/18	3/6
J	4/28	4/24	4/8	4/28	4/24	4/8
L	5/35	5/30	5/10	5/35	5/30	5/10

Procedimento

O estudo programou as seguintes condições experimentais, nesta ordem: Avaliação Inicial, Treino da Tarefa, Treino AB e BC, Treino Misto, Teste de Simetria BA/CB, Teste de Transitividade/Equivalência AC/CA, Teste de Generalização 1, Treino AD, Teste de Generalização 2, Teste D-(ABC), Treino AE, Teste de Generalização 3, Teste E-(ABCD), Treino AF, Teste de Generalização 4, Teste F-(ABCDE) e Avaliação Final. A Tabela 2 apresenta a sequência de treinos e testes realizados e informações sobre cada condição experimental.

Avaliação inicial. A avaliação inicial consistiu na aplicação coletiva em folha de papel de duas provas contendo problemas semelhantes aos utilizados por Carraher e Schlie-mann (1992). Cada prova foi composta por 30 itens, sendo 20 referentes a frações expressas na forma relativa e 10 referentes a frações expressas na forma literal ou absoluta. A avaliação inicial apresentou questões com as frações 1/3, 1/5, 1/4, 1/8 e 1/9 e suas equivalentes (e.g., 2/6, 3/9, 2/10, 3/15, 2/8, 3/12, 2/16, 3/24, 2/18, 4/36). As duas provas aplicadas na avaliação inicial diferiram somente quanto à forma de apresentação das

Tabela 2

Condições experimentais na sequência de ocorrência e respectivas relações apresentadas, número mínimo de blocos e tentativas por bloco

Condição ¹	Relações Apresentadas	Número Mínimo de Blocos	Tentativas por Bloco ²
Avaliação Inicial	Ver texto	2	30
Treino de Relações	AB e BC	2	9
Treino Misto	AB e BC	2	12
Teste de Simetria ³	BA e CB	2	12 (6)
Teste de Transitividade/ Equivalência ³	AC e CA	2	12 (6)
Teste de Generalização 1	GH, HG, HI e IG	1	12
Treino de Relações	AD	2	9
Teste de Generalização 2	GH, HG, HI, IG, JI, GJ, JH	1	12 (5)
Teste de Expansão de Classes D-(ABC) ³	DA, DB, DC, BD e CD	2	20 (5)
Treino de Relações	AE	2	9
Teste de Generalização 3	GH, HG, HI, IG, LI, GL, LH	1	12 (5)
Teste de Expansão de Classes E-(ABCD) ³	EA, EB, EC, ED, BE, CE, e DE	2	26 (5)
Treino de Relações	AF	2	9
Teste de Generalização 4	GH, HG, HI, IG, IH, LJ, JL	1	12 (5)
Teste de Expansão de Classes F-(ABCDE) ³	FA, FB, BF, FC, CF, FD, DF, FE e EF	2	32 (5)

¹ O Treino da Tarefa realizado com figuras conhecidas ocorreu após a Avaliação Inicial e foi descrito no corpo do trabalho.

² O número entre parênteses indica as tentativas de linha de base inseridas.

³ Todas relações testadas eram treinadas em casos de escores menores do que 100% no último bloco.

frações pictóricas: em uma delas as figuras foram apresentadas com configuração contínua e, na outra, com configuração discreta. Cada questão apresentou quatro alternativas de respostas aos participantes. Para a metade dos sujeitos, a prova discreta foi aplicada em primeiro lugar, seguida pela contínua, e, para a outra metade, o procedimento foi inverso. As aplicações ocorreram na sala de aula da própria escola em que os alunos estudavam

com intervalo de 48 horas entre uma e outra. A situação de teste da avaliação inicial foi repetida no final do estudo e denominada avaliação final. Contudo, essa última avaliação ocorreu de forma individual no Laec. A Figura 1 apresenta um exemplo de figuras utilizadas nas questões expressas nas formas absoluta-discreta e relativa-contínua. A descrição completa do questionário utilizado nessas avaliações pode ser encontrada em

Santos (1999). As instruções orais dadas aos sujeitos antes da aplicação foram as seguintes: “Sua tarefa será responder a todas as questões com o máximo de atenção. Leia cada questão e escolha, fazendo um ‘X’ sobre a letra correspondente, a resposta correta. Todas as questões têm uma resposta correta, e você tem o tempo que precisar para responder. Alguma dúvida?”

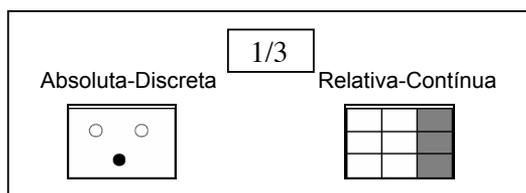


Figura 1. Exemplos de figuras correspondentes à fração $1/3$ expressas na forma absoluta-discreta e relativa-contínua nas questões da avaliação inicial e final.

Os 10 sujeitos com menores escores na avaliação inicial formaram aleatoriamente os dois grupos experimentais, E1 e E2, com cinco membros em cada. Dez outros sujeitos com os próximos menores escores na avaliação inicial formaram aleatoriamente os dois grupos de controle, C1 e C2, com cinco membros em cada, e participaram apenas das avaliações inicial e final.

Treino da tarefa. Após a avaliação inicial, os sujeitos dos Grupos E1 e E2 receberam treino para aprender a tarefa de pareamento ao modelo. Nessa sessão, foram utilizados estímulos não fracionários. Por exemplo, a palavra escrita UM como modelo e as figuras de uma, duas e três bolinhas como comparação; o número 1 escrito e as palavras escritas UM, DOIS e TRÊS como comparações. O treino consistiu na apresentação de dois blocos com nove tentativas cada, que diferiram ape-

nas na ordem de apresentação das tentativas. Os estímulos foram apresentados em cinco janelas $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$, sendo uma no centro da tela do computador, contendo o modelo e quatro janelas laterais e equidistantes do modelo, contendo os estímulos de comparação. Apenas três comparações foram apresentadas por tentativa, ou seja, uma das janelas sempre ficava vazia durante cada tentativa.

A tentativa era iniciada com a apresentação do modelo já exibindo o cursor (seta) no seu centro. Após o participante pressionar a tecla esquerda do *mouse*, as comparações apareciam imediatamente. Para escolher uma comparação, o sujeito deveria dirigir o cursor até uma das janelas laterais e pressionar novamente a tecla esquerda do *mouse* com o cursor sobre o estímulo de comparação. Foi programado um intervalo de 0,5 s entre as apresentações das tentativas (ITI).

Os acertos foram consequenciados com a apresentação da figura de um rosto sorrindo no lado inferior esquerdo do monitor, juntamente com a palavra CERTO e um *jingle* característico. Um contador, apresentado continuamente no lado esquerdo superior do monitor, acumulava um ponto para cada acerto. Os pontos obtidos foram trocados por fichas ao final da sessão e posteriormente por algum item disponível na lojinha. Respostas incorretas foram seguidas por apenas um bipe característico. Nesse caso, o procedimento corretivo de reapresentação da tentativa após o ITI foi programado. O procedimento era repetido até que a escolha de uma comparação correta ocorresse.

Foram dadas as seguintes instruções orais para o treino inicial da tarefa: “Sua tarefa é simples. Você deverá, em primeiro lugar, apertar o botão da esquerda deste aparelho

que se chama *mouse* (demonstração), o que fará aparecer figuras laterais. Depois, você dirigirá a seta até uma das figuras laterais e apertará novamente o botão. O monitor mostrará se sua escolha foi certa ou errada. No caso de acertos, aparecerão uma música, um rosto sorrindo e um ponto no marcador. No caso de erros, ocorrerá apenas um barulho. Cada acerto vale um ponto. O total de pontos ganhos poderá ser trocado por doces, brinquedos ou algum objeto de sua preferência no final da sessão. Você entendeu?” As instruções foram repetidas até que o participante não tivesse nenhuma dúvida.

Treinos. Nessas condições, foram ensinadas diretamente relações arbitrárias entre três frações expressas de forma pictórica e numérica. A apresentação dos estímulos aconteceu de forma semelhante à do treino da tarefa e obedeceu aos mesmos critérios. Nas tentativas dos Treinos AB, AD, AE e AF, o modelo era sempre uma figura de um quadrado dividido em pedaços iguais com parte dos pedaços pintados. Os estímulos de comparação eram frações representadas como proporções numéricas. Nas tentativas do Treino BC, tanto o modelo quanto os estímulos de comparação eram frações numéricas (veja a Tabela 1).

Cada treino foi precedido pela apresentação de nove tentativas de teste (pré-teste) das relações a serem ensinadas, para as quais não houve nenhum tipo de consequência para acertos ou erros. Os pontos referentes aos acertos, nessas tentativas, eram somados ao contador no final de cada sessão. Durante essas tentativas, o contador não estava presente na tela do monitor. O pré-teste foi precedido pelas seguintes instruções: “Sua tarefa continua sendo simples. Tudo o que você tem que

fazer é olhar atentamente para o monitor e clicar o botão do *mouse*. Em seguida, escolher, também usando o *mouse*, uma das frações laterais. Não será mostrado no monitor se sua escolha foi certa ou errada. Portanto, você poderá estar errando ou acertando em suas escolhas. Cada acerto vale um ponto, e a soma total você receberá no final da sessão.”

Os participantes que obtiveram 100% de acertos no pré-teste não foram submetidos ao treino da relação em questão. Escores menores do que 100% de acertos no pré-teste produziram as demais tentativas de treino das relações condicionais. Nesses treinos, cada modelo correspondeu sempre a uma única comparação, e cada comparação correta apareceu em três posições diferentes nas janelas laterais, compondo um bloco de nove tentativas. Cada treino apresentou alternadamente dois blocos que diferiram apenas quanto à ordem de apresentação das tentativas. Nessa condição, o contador estava presente no canto superior esquerdo da tela do monitor.

Foram programados cinco treinos diferentes na ordem descrita no primeiro parágrafo dessa seção: AB, BC, AD, AE e AF. A primeira letra de cada par representa o conjunto de estímulos modelo e a segunda letra, o conjunto de estímulos de comparação. A Tabela 1 apresenta as três frações utilizadas em cada treino para cada grupo experimental. A referência numérica de cada elemento dos conjuntos na tabela indica as relações consideradas como certas e erradas (*e.g.*, na presença de A1, a escolha de B1 era reforçada, enquanto, na presença de A2, a escolha de B2 era reforçada).

Antes da primeira tentativa de treino, o participante recebia as seguintes instruções orais: “Sua tarefa continua sendo simples.

Tudo o que você tem que fazer é olhar atentamente para o monitor e clicar o botão do *mouse*. Em seguida, escolher, usando o *mouse*, uma das frações laterais. No entanto, agora, será mostrado no monitor se sua escolha foi certa ou errada. Cada acerto vale um ponto. O total de pontos ganhos poderá ser trocado por doces, brinquedos ou algum objeto de sua preferência no final da sessão. Você entendeu?”

Após cada treino, o participante passava por uma nova avaliação das relações treinadas, de forma idêntica à descrita para o pré-teste, e agora denominada pós-teste.

Em seguida aos treinos das condições AB e BC, os participantes passaram pelo Treino Misto, no qual se apresentavam dois blocos com seis tentativas da relação AB e seis da relação BC. Os blocos diferiram apenas na ordem de apresentação das tentativas. Somente três tentativas de cada bloco programavam consequências para a escolha do participante. Os pontos referentes aos acertos não consequenciados eram somados ao contador no final da sessão. No início desse treino, os participantes receberam as seguintes instruções orais: “A sua tarefa é igual à anterior. Tudo o que você tem que fazer é olhar atentamente para o monitor e clicar o botão do *mouse*. Em seguida, escolher com o *mouse* uma das frações laterais. Apenas algumas vezes será mostrado se sua escolha foi certa ou errada. Quando nada for mostrado, você pode ter acertado ou errado, mas todos os pontos serão recebidos no final da sessão.”

As frações utilizadas em cada treino diferiram entre os participantes dos Grupos E1 e E2 quanto aos estímulos utilizados como comparação. Para E1, os estímulos de comparação foram frações com o mesmo nume-

rador (e.g., $1/3$, $1/4$ e $1/5$) e, para E2, as comparações foram frações com numeradores e denominadores diferentes em cada tentativa (e.g., $3/9$, $2/8$ e $1/5$). A Tabela 1 apresenta as frações utilizadas para cada grupo, em cada treino.

O critério adotado para o encerramento das condições de treino foi o acerto de 100% das tentativas de um bloco, a partir da exposição ao segundo bloco.

Testes. Após o participante atingir o critério de aprendizagem das relações AB e BC ensinadas, foram realizados testes de simetria e transitividade/equivalência para avaliar a emergência das relações BA/CB e AC/CA, respectivamente. Cada teste consistiu na apresentação alternada de dois blocos de 12 tentativas, das quais seis foram tentativas com as novas relações (BA/CB ou AC/CA) e seis com as relações previamente ensinadas (AB e BC). Cada bloco diferiu apenas na ordem de apresentação das tentativas. Apenas quatro tentativas de treino foram consequenciadas em cada bloco, mas todos os pontos eram somados ao contador no final da sessão.

Testes semelhantes para avaliar a inclusão de novos membros nas classes de equivalência foram realizados após o ensino de relações AD, AE e AF. O Teste D-(ABC) foi realizado depois do ensino das relações AD; o Teste E-(ABCD) foi conduzido depois do ensino de relações AE; e o Teste F-(ABCDE) ocorreu após o ensino das relações AF. No Teste D-(ABC), foram avaliadas as relações DA, DB, BD, DC e CD. No Teste E-(ABCD), foram verificadas as relações EA, EB, BE, EC, CE, ED e DE. No Teste F-(ABCDE), foram avaliadas as relações FA, FB, BF, FC, CF, FD, DF, FE e EF. Em cada teste, apresentaram-se três tentativas de cada relação citada e mais

cinco tentativas de linha de base. Foram organizados dois blocos em cada teste que diferiram apenas na ordem de apresentação das tentativas. Assim, os blocos do teste D-(ABC) foram compostos por 20 tentativas, do teste E-(ABCD), por 26 tentativas, e do teste F-(ABCDE), por 32 tentativas.

Os critérios de desempenho adotados para finalizar um teste foram: 1. 100% de acertos em um bloco; ou 2. porcentagem menor que 100% e igual ou decrescente em dois blocos consecutivos. Escores menores que 100% com tendência crescente em blocos sucessivos implicavam apresentação de um novo bloco de tentativas. O participante que não alcançava 100% de acertos em um teste era, em seguida, treinado nessas relações antes de prosseguir para a próxima condição. O treino consistiu na apresentação das tentativas programadas no teste; porém, no treino, havia consequência para as respostas corretas e incorretas, conforme descrito anteriormente nas condições de treino.

Testes de generalização. Foram realizados quatro testes com frações não ensinadas para avaliar a generalização da aprendizagem ao longo da expansão das classes de estímulos. Os testes ocorreram na seguinte ordem: o primeiro, após o Teste de Transitividade/Equivalência AC/CA; o segundo, após o Treino AD; o terceiro, após o Treino AE; e o último, após o Treino AF. Participantes com escores menores que 100% de acertos nos três últimos testes tinham a oportunidade de repetir os testes. A primeira nova oportunidade ocorria após o teste de expansão das classes, programado para cada uma das condições de treino (AD, AE e AF), e a segunda, após o treino das condições de expansão, programado apenas para os sujeitos que não

demonstraram o critério durante os testes. Cada Teste de Generalização consistiu na aplicação de um bloco com 12 tentativas, das quais sete foram para avaliar relações entre frações não utilizadas nos treinos e cinco tentativas de linha de base, as quais foram consecutivas. Dentre as sete tentativas com estímulos novos, cinco foram repetidas em todos os testes e duas foram tentativas específicas para aquele teste (tentativas novas). Os estímulos utilizados nos Testes de Generalização foram frações numéricas expressas de forma relativa, envolvendo os conjuntos G, H, I, J e L (Tabela 2).

As instruções para todos os testes foram as mesmas utilizadas no Treino Misto.

RESULTADOS

Os resultados apresentados a seguir referem-se aos desempenhos dos participantes nas condições de treinos e testes e nas avaliações inicial e final. O delineamento de sujeito como seu próprio controle, com medidas repetidas de desempenho (avaliação) inicial e final, pré- e pós-testes, e Testes de Generalização, utilizado neste estudo reflete o interesse no dado individual. No entanto, a divisão dos sujeitos em grupos permitiu comparar os desempenhos em função da repetição (Grupo E1) ou não (Grupo E2) do numerador dos estímulos de comparação. Os resultados principais foram representados em figuras e apresentados em tabelas, mas informações adicionais sobre resultados considerados relevantes são apenas descritas no texto. Essas análises podem ser solicitadas aos autores ou obtidas em Santos (1999). Os resultados relativos ao desempenho em tarefas de treino e testes realizadas apenas pelos grupos expe-

rimentais são apresentados inicialmente. Em seguida, são realizadas comparações entre os desempenhos dos grupos experimentais e de controle nas avaliações inicial e final.

No treino da tarefa, os participantes, em geral, aprenderam o procedimento de escolha de acordo com o modelo necessitando de um número variável de blocos de tentativas (mínimo de dois e máximo 16 blocos, moda 3) para atingir o critério de aprendizagem. Houve variação também no número de erros cometidos pelos participantes durante o treino da tarefa, sendo o mínimo de um e o máximo de 116 (média 29,8).

A Tabela 3 apresenta a porcentagem de acertos para os pré- e pós-testes nas condições de treino das relações AB, BC, AD, AE e AF. Os melhores desempenhos ocorreram na relação AB (figura – fração numérica ab-

soluta). Em geral, os participantes do Grupo E1 mostraram desempenhos mais altos nos pré-testes do que os do Grupo E2, especialmente na relação AD. No Grupo E2, apenas a relação AB não precisou ser treinada, exceto para três participantes (LI, LE e GE). Nas demais relações entre frações numéricas equivalentes, todos os estudantes precisaram de treino.

De forma geral, a porcentagem de respostas corretas aumentou após o treino (pós-teste) de cada relação. A maior parte dos participantes do Grupo E1 obteve 100% de acertos nos pós-testes. Por outro lado, no Grupo E2, vários sujeitos obtiveram porcentagens de acerto menores que 100%, em especial na relação BC, em que ninguém obteve esse índice. Nesse grupo, o melhor desempenho dos sujeitos foi na relação AF.

Tabela 3

Porcentagens de acerto antes (pré-) e depois (pós-) do ensino das relações AB, BC, AD, AE e AF para cada participante dos Grupos E1 e E2, relativas às nove tentativas dos blocos de avaliação

Grupo	Participante	Treino AB		Treino BC		Treino AD		Treino AE		Treino AF	
		Pré-	Pós-								
E1	AJ	100,00	–	33,33	100,00	100,00	–	77,78	100,00	100,00	–
	MI	100,00	–	33,33	100,00	100,00	–	88,89	100,00	66,67	100,00
	KA	100,00	–	100,00	–	88,89	100,00	44,44	100,00	66,67	100,00
	PH	55,56	100,00	88,89	100,00	100,00	–	33,33	88,89	44,44	100,00
	WE	22,22	100,00	77,78	100,00	66,67	100,00	44,44	100,00	77,77	100,00
E2	JO	22,22	100,00	44,44	88,89	44,44	100,00	55,56	100,00	33,33	100,00
	FJ	66,67	100,00	33,33	88,89	0,00	88,89	33,33	55,56	11,11	100,00
	LI	100,00	–	33,33	88,89	0,00	100,00	33,33	100,00	0,00	44,44
	LE	100,00	–	33,33	88,89	11,11	88,89	77,78	100,00	44,44	100,00
	GE	100,00	–	44,44	88,89	22,22	100,00	11,11	88,89	33,33	100,00

Quanto ao número de blocos de tentativas e de erros cometidos no treino das relações AB, BC, AD, AE e AF (não mostrados em figura ou tabela), o Grupo E1 necessitou, em geral, de um número menor de blocos para atingir o critério de aprendizagem (moda e mediana dois blocos, média 3,8 blocos). No Grupo E2, a quantidade de blocos para que 100% de acertos fossem atingidos

em um bloco foi maior (moda 2, mediana 4, média 4,57), com tendência decrescente ao longo dos treinos. O número de erros cometidos durante os Treinos BC, AD, AE e AF, em geral, foi menor para o Grupo E1 do que para o Grupo E2.

Os resultados de todos os testes realizados no estudo são apresentados na Figura 2. Cada gráfico da figura apresenta as porcentagens

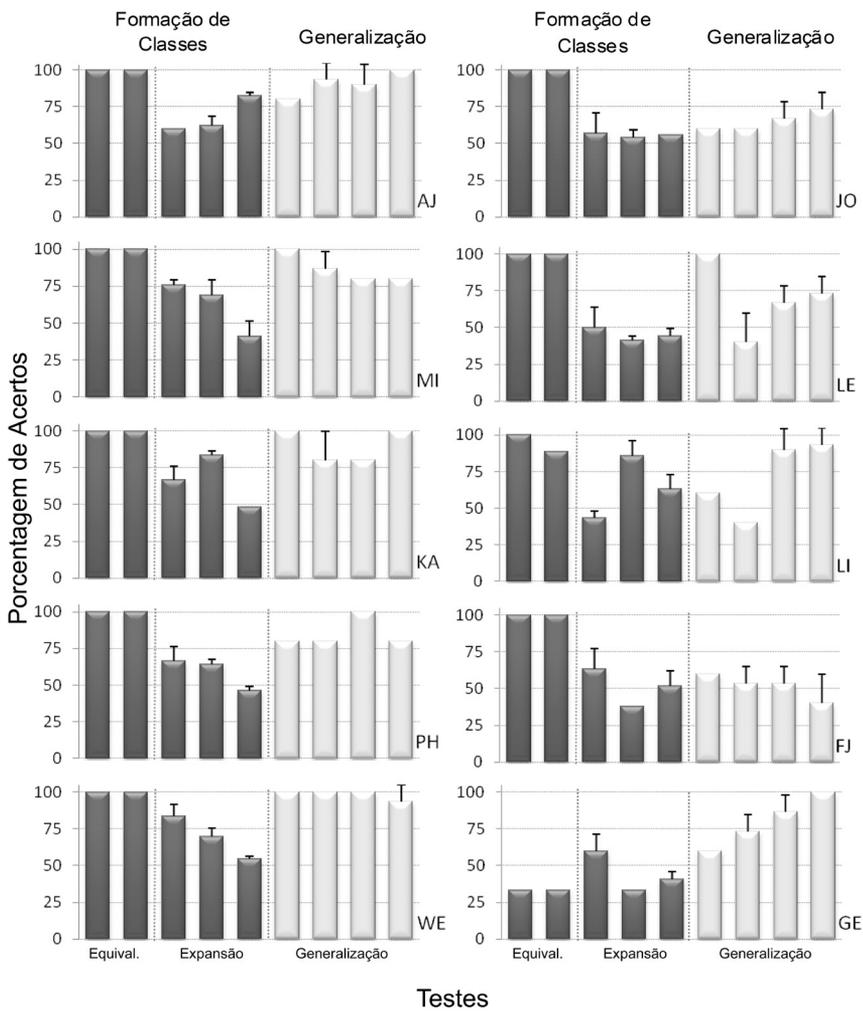


Figura 2. Testes de Formação de Classes de Equivalência (BA/CB, AC/CA), de Expansão das Classes (D-(ABC), E-(ABCD), F-(ABCDE)) e de Generalização com novas frações após cada adição de relações treinadas, para cada participante do Grupo E1 (gráficos à esquerda) e do Grupo E2 (gráficos à direita).

de acerto nos testes de formação de classes de estímulos equivalentes e nos Testes de Generalização para frações novas de cada participante do Grupo E1 (gráficos à esquerda) e do Grupo E2 (gráficos à direita).

As primeiras duas barras de cada gráfico representam os escores no último bloco dos testes BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade/equivalência) de cada participante, realizados após os Treinos AB e BC. Observa-se que os estudantes apresentaram a emergência das relações, obtendo 100% de acertos nos testes de simetria e transitividade/equivalência em no máximo três blocos. Apenas GE, no Teste de Simetria, e GE e LI, no Teste de Transitividade/Equivalência, ambos do Grupo E2, precisaram de treino nessas relações. Todos apresentaram 100% de acertos após o treinamento.

A terceira, a quarta e a quinta barras (escuras) da Figura 2 mostram as porcentagens médias de acerto nos testes das relações D-(ABC), E-(ABCD) e F-(ABCDE), respectivamente. Cada teste foi realizado após o ensino de uma nova relação que envolvia o conjunto de estímulos identificado pela primeira letra (D, E ou F), tendo como modelo o conjunto pictórico (A). Os testes avaliaram a emergência das relações entre a nova fração numérica (D, E ou F) e todos os outros conjuntos de estímulos presentes em treinos anteriores (veja a Tabela 2). Cada barra representa a média das porcentagens obtidas nos blocos de teste, até que o critério de finalização fosse atingido. Os traços verticais indicam um desvio padrão da média. Em geral, escores mais altos foram mais frequentes para o Grupo E1 do que para o Grupo E2. Os participantes não mostraram expansão das classes de equivalência, apresentando es-

cores abaixo de 100% (entre 33,3% e 85,7% de acertos). Resultados abaixo de 100% de acertos em um teste acarretavam o ensino das relações testadas em sessão subsequente. Observa-se que, mesmo com o aumento das relações ensinadas, os escores em testes subsequentes não foram progressivamente mais altos para a maioria dos participantes.

A Tabela 4 apresenta o número de blocos de tentativas e de erros cometidos nas condições de ensino das relações D-(ABC), E-(ABCD) e F-(ABCDE). O número de blocos necessários variou entre os sujeitos dos dois grupos, ocorrendo um número maior no Treino F-(ABCDE), exceto para o sujeito AJ (GE1). O número de blocos aumentou para sete dos 10 sujeitos ao longo das condições programadas (MI, PH, WE, JO, FJ, LE, GE), enquanto a variação no número de erros mostrou-se assistemática para quatro sujeitos (AJ, MI, KA e LE). Todos os sujeitos, ao final, aprenderam as relações ensinadas.

Em resumo, todas as relações BA/CA e AC/CA emergiram após o Treino AB e BC (exceto para os participantes GE e LI do Grupo E2). Os percentuais de acerto nos outros testes de formação de classes foram mais baixos, variáveis para cada participante e semelhantes entre os dois grupos, tendo sido necessário ensinar diretamente as relações D-(ABC), E-(ABCD) e F-(ABCDE) a todos os participantes.

As barras brancas da Figura 2 mostram as porcentagens médias de respostas corretas nos Testes de Generalização que foram repetidos ao longo do estudo. Os resultados foram calculados a partir da divisão dos escores nos blocos de cada teste pelo total de blocos realizados. O desvio padrão dessas médias é representado pelo traço vertical em cada bar-

Tabela 4

Número de blocos (NB) e de erros durante os treinos das relações D-(ABC), E-(ABCD) e F-(ABCDE) para os participantes dos Grupos E1 e E2 que não obtiveram 100% de acertos no último bloco de teste dessas relações

Grupo	Participante	D-(ABC)		E-(ABCD)		F-(ABCDE)	
		NB	Erros	NB	Erros	NB	Erros
E1	AJ	15	56	11	70	4	15
	MI	16	50	8	31	30	179
	KA	22	63	8	33	24	173
	PH	6	30	18	85	40	370
	WE	2	1	11	29	29	249
E2	JO	10	32	16	86	29	94
	FJ	22	72	26	144	45	381
	LI	15	61	–	–	16	96
	LE	9	40	11	61	12	58
	GE	20	47	56	408	69	604

ra. Os participantes mostraram valores acima de 50% de acertos, sendo os escores do Grupo E1 geralmente mais altos do que os do Grupo E2. Todos os participantes do Grupo E1 apresentaram 100% de acertos em um ou mais Testes de Generalização. No Grupo E2, houve apenas dois casos de escore máximo (LE no primeiro teste e GE no último). Ao longo dos testes, ocorreu tendência crescente na porcentagem de acerto para metade dos participantes, em sua maioria do Grupo E2. Esses resultados são representativos tanto para a análise em separado das tentativas com frações que se repetiam em todos os testes, quanto para as tentativas com frações novas.

Os resultados das avaliações inicial e final realizadas em forma de prova de múltipla escolha para os diferentes grupos de participantes são apresentados na Figura 3. As

barras vazias mostram as porcentagens médias de acertos na avaliação inicial e as barras cinza, os resultados da avaliação final. O traço vertical de cada barra representa um desvio padrão da média. Os painéis à esquerda referem-se às questões com problemas que apresentavam frações expressas na *forma absoluta*; os painéis à direita apresentam a análise das questões com frações expressas na *forma relativa*. Painéis superiores mostram resultados dos Grupos E1 e C1 e os painéis inferiores, os resultados dos Grupos E2 e C2. Para problemas de *frações absolutas*, os escores da avaliação inicial foram relativamente altos (acima de 50%) para todos os grupos e semelhantes entre os grupos. As diferenças entre os escores nas duas avaliações não foram significativas para nenhum dos grupos. No entanto, os escores na avaliação inicial de

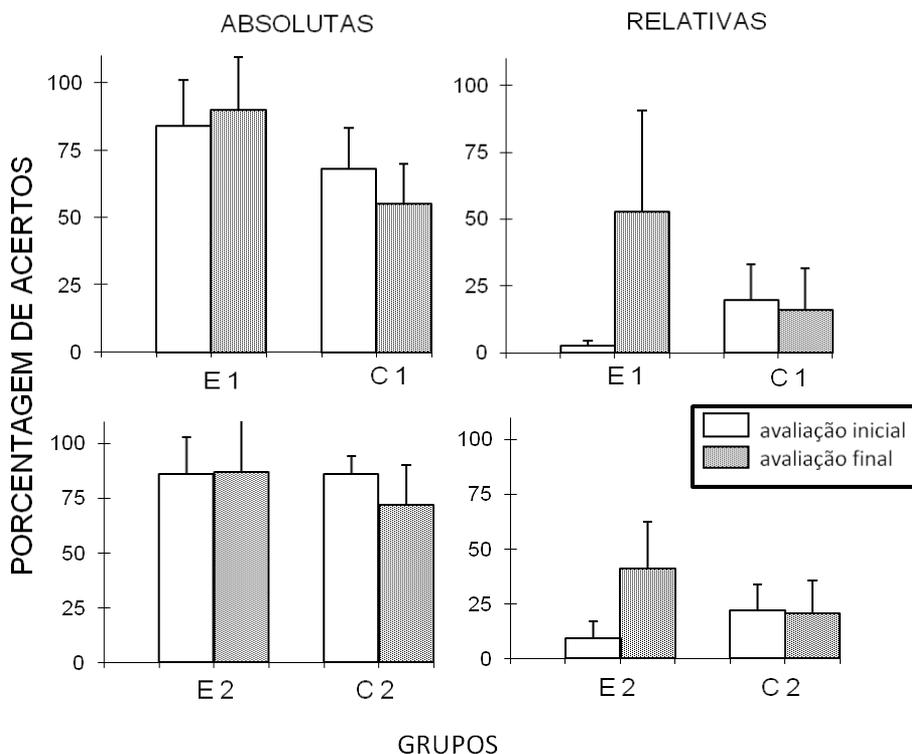


Figura 3. Porcentagem de acertos nas avaliações inicial e final para cada grupo experimental e de controle, com análises separadas para frações absolutas e relativas. As barras verticais representam um desvio padrão da média de cada grupo.

frações relativas foram baixos (em geral, menores que 25% de acertos). Para essas questões, houve aumento significativo das porcentagens de acerto na avaliação final apenas para os grupos experimentais, sendo a diferença observada estatisticamente significativa ($p < 0,05$). A magnitude do aumento observado nos escores do Grupo E1 foi maior do que a mudança observada no Grupo E2. Os desempenhos dos grupos de controle foram baixos e semelhantes nas duas avaliações.

Quando os resultados das avaliações são comparados considerando-se apenas frações treinadas ou frações novas, resultados semelhantes de diferenças entre os grupos e da avaliação inicial e final são observados.

No entanto, comparações entre as questões com frações expressas de forma contínua e discreta nas avaliações inicial e final não mostraram diferença significativa ($t = 1,45 < t_{\alpha/2} = 2,0244$), mas que as mudanças nos escores da avaliação inicial para a final são semelhantes quando qualquer uma das formas são utilizadas para representar as frações.

DISCUSSÃO

O presente trabalho verificou se técnicas de controle de estímulos foram eficazes no ensino de equivalência relativa entre frações, considerando que discriminações con-

dicionais são necessárias para a resolução de problemas de proporção. Investigou-se a influência do ensino de discriminações condicionais e da variação do numerador dos estímulos de comparação sobre a aprendizagem de relações treinadas e sobre a generalização. Resumem-se a seguir os principais resultados do estudo.

Os resultados mostraram que o procedimento de pareamento ao modelo foi eficaz para estabelecer discriminações condicionais entre frações pictóricas e frações numéricas e entre duas frações numéricas. A variação de numeradores e denominadores programados nos estímulos de comparação do Grupo E2 produziu mais erros e dificultou o adequado controle de estímulos para respostas corretas. A variação de denominadores das frações e a manutenção dos numeradores produziram escores mais altos e menos erros durante os treinos, sugerindo que essa forma de combinar os estímulos facilita a aquisição de relações entre frações equivalentes.

Após aprenderem a selecionar frações numéricas (B) correspondentes a representações pictóricas absolutas (A) e também, na presença dessas frações numéricas (B), selecionar frações numéricas equivalentes (C), todos os sujeitos (exceto GE do Grupo E2) apresentaram emergência das relações de simetria BA/BC e de transitividade/equivalência AC/CA. Contudo, os desempenhos nos testes de expansão das classes de equivalência, após o ensino de novas relações de linha de base (com frações numericamente equivalentes), mostraram que o ensino dessas relações não foi suficiente para a expansão das classes, sendo necessário, então, o treino direto de todas as relações não ensinadas. O tipo de arranjo de treino predominantemen-

te uninodal (utilizando o conjunto A como o principal estímulo que faz a ligação com os outros membros da classe principal – Treinos AB, AD AE e AF) pode ser um dos fatores que dificultaram a emergência das relações não ensinadas diretamente. Vários estudos (Duarte & de Rose, 2006; Fields & Verhave, 1987; Kennedy, Itkonen, & Lindquist, 1994; Fields *et al.*, 1997; Fields, Landon-Jimenez, Bufington, & Adams, 1995) demonstraram que a estrutura ou arranjo dos treinos influencia a formação de classes de equivalência. Duarte e de Rose (2006) obtiveram melhores resultados com a estrutura de treino multinodal, o que sugere que essa variável necessita ser investigada no contexto de ensino de frações.

Nos Testes de Generalização, realizados ao longo das condições experimentais, os participantes que foram treinados com frações com o mesmo numerador (E1) apresentaram desempenhos altos desde o primeiro teste. O Grupo E2 apresentou escores de generalização mais baixos que os do Grupo E1, com tendência crescente ao longo dos testes para a maioria dos participantes.

Os desempenhos nos testes de expansão de classes dos participantes que realizaram o treino com numerador igual (Grupo E1) foram mais baixos do que os desempenhos nos testes com novas frações (Testes de Generalização). Os escores altos do Grupo E1 nos Testes de Generalização podem derivar de controle específico ao denominador estabelecido pelo treino com numeradores iguais, o que não ocorreu para o Grupo E2. Como nos Testes de Generalização também foram utilizadas alternativas com numeradores iguais, a semelhança da tarefa pode ter colocado o Grupo E1 em situação de vantagem

sobre o Grupo E2. Esse argumento não explica, entretanto, os intrigantes baixos escores nos testes de expansão de classes em relação aos de generalização.

Os resultados da avaliação no início e no final do estudo, em forma de prova com papel e lápis, foram comparados para os grupos experimentais e de controle. Os desempenhos dos grupos experimentais e de controle na avaliação inicial foram semelhantes nos problemas com frações de treino e de generalização. Os participantes de todos os grupos eram capazes de resolver os problemas que envolviam frações absolutas no início do estudo, mas não as relativas. Na avaliação final, apenas os grupos experimentais apresentaram aumento significativo na resolução de problemas com frações expressas na forma relativa. A mudança observada após o ensino das relações condicionais para o Grupo E1 foi maior do que a encontrada para E2. Resultados semelhantes foram observados para frações representadas de forma discreta e contínua e para frações ensinadas e novas.

Desempenho nas avaliações inicial e final

Os resultados da avaliação inicial estão de acordo com a literatura (e.g., Carraher & Schlieman, 1992; Santos, 1999) e mostraram que crianças de quinta série resolveram problemas com frações expressas na forma absoluta, mas não resolveram problemas com frações expressas de forma relativa (Figura 3). Considerando que todos os sujeitos já haviam sido expostos a esse conteúdo na escola, os resultados da avaliação inicial corroboram os dados obtidos por Carraher e Schliemann (1992) e sugerem que as formas tradicionais de ensino são insuficientes para assegurar a compreensão do conceito de equivalência de

frações representadas por números diferentes. O aumento de acertos da avaliação inicial para a final observado apenas para os sujeitos experimentais, principalmente para as frações relativas e em especial para os sujeitos do Grupo E1, evidencia o efeito do procedimento utilizado.

Behr, Wachsmuth e Post (1988) afirmaram que conceitos envolvendo frações são aprendidos mais fácil e rapidamente quando as quantidades são representadas de forma contínua, sendo, portanto, necessário programar a transferência da aprendizagem com o modelo contínuo para a representação discreta. Os resultados obtidos no presente trabalho não confirmam essas afirmações, uma vez que não se observou diferença na avaliação final entre as formas discreta e contínua de apresentação das frações. As frações foram expressas durante os treinos e testes das condições experimentais segundo o modelo contínuo, e a exposição a figuras discretas ocorreu apenas nas avaliações inicial e final. Seria interessante, em estudos posteriores, investigar se esses resultados são replicados quando os treinos e testes experimentais forem programados utilizando representações discretas de frações.

Desempenho nos treinos

Os resultados observados nos Treinos AB, BC, AD, AE e AF (Tabela 4) sugerem que a manutenção do numerador dos estímulos de comparação (Grupo E1) foi uma estratégia que facilitou a aquisição das respostas corretas. A manutenção constante do numerador reduziu o treino necessário para ensinar as relações entre estímulos. Spinillo (1992, 1993) afirma que a resolução de problemas que envolvem magnitudes relativas de frações exige

que se considere a relação entre o numerador e o denominador da fração. A variação apenas do denominador das frações durante cada tentativa do treino e do numerador de um treino (*e.g.*, AB) para o outro (*e.g.*, AD) pode ter funcionado como uma forma gradual de dificuldade do procedimento para ensinar as correspondências entre as frações pictóricas e respectivas relações entre numerador e denominador. O estabelecimento dessas correspondências é, para o analista do comportamento, parte importante do que é chamado de compreender o conceito de fração.

No entanto, a manutenção dos numeradores iguais poderia ter estabelecido controle apenas pelos elementos que mudavam na contingência e o numerador poderia ter se tornado irrelevante para a escolha da alternativa correta. Esse controle restrito levaria a desempenhos mais pobres nos testes (Lovaas, Schreibman, Koegel, & Rehm, 1971). Os resultados mais altos dos testes desses participantes mostram que o controle pelo numerador foi estabelecido em maior grau do que para o Grupo E2, provavelmente porque esse elemento foi variado entre os diferentes treinos. Esses resultados corroboram a análise de Saunders e Green (1999), de que o desenvolvimento de discriminações de estímulos presentes em cada tentativa e nas diferentes tentativas e treinos é crucial para a compreensão do repertório emergente.

O treino da relação AB foi, em geral, o que produziu aprendizagem com um número menor de blocos e menor quantidade de erros, possivelmente porque a relação existente entre os estímulos dos conjuntos A e B foi programada de forma literal, ou seja, houve uma correspondência direta entre o número de partes marcadas e o numerador e

o número de partes em que o todo foi dividido e o denominador.

A maior ocorrência de erros especialmente no treino da relação BC para o Grupo E2 pode ser devido ao fato de essa condição ter sido a primeira que envolveu a relação entre frações diferentes de igual magnitude relativa, além de as alternativas possuírem numeradores e denominadores diferentes.

Quando os resultados dos testes de expansão de classes não alcançavam 100% de acertos, todas as relações eram diretamente ensinadas. Nos resultados dos Treinos D-(ABC), E-(ABCD) e F-(ABCDE), observou-se um elevado número de blocos para que o critério de aprendizagem fosse alcançado (Tabela 4). É importante notar que, à medida que novos conjuntos de estímulos foram introduzidos (D, E e F), maior foi a classe de estímulos que se queria estabelecer e maior o número de relações a serem treinadas, o que aumentou a complexidade da tarefa e a chance de erros. Outra possibilidade de explicação pode ser o procedimento de correção programado de 0,5 s de tela escura após a ocorrência de um erro repetido até a ocorrência da escolha correta, quando a resposta era reforçada com um ponto no contador. Da forma como foi programado, o procedimento de correção viabilizou a obtenção do número máximo de reforços, mesmo quando o padrão de respostas sob controle de outras características da situação se estabelecia (por exemplo, tentar a alternativa da direita, depois a do meio e depois a da esquerda). Essa contingência pode ter dificultado o desenvolvimento de desempenho sob controle de características relevantes de estímulo. Sugere-se como um ajuste do procedimento para investigações futuras

a utilização de um *timeout* de maior duração como consequência para erros, o que resultará em maior atraso na obtenção dos reforços em caso de escolha incorreta e poderá aumentar a discriminabilidade da contingência. Intrigante, entretanto, o alto número de erros contrastado com os resultados dos Testes de Generalização que sugerem conclusões contrárias sobre a aprendizagem do conceito de equivalência de frações. Os erros nos testes de expansão e nos treinos mostraram que as relações demoraram a ser aprendidas, enquanto os escores dos Testes de Generalização, que ocorreram antes dos treinos, sugeriam alguma aprendizagem do conceito. Estudos adicionais são necessários para avaliar que aspectos do procedimento explicariam esses resultados discrepantes.

Desempenho nos Testes de Repertório Emergente

Um dos principais interesses deste estudo esteve na investigação de repertório emergente (não ensinado) a partir do ensino de relações utilizando procedimentos de pareamento ao modelo. Os diversos testes realizados procuraram avaliar três tipos de relações novas: (1) as esperadas pela formação de três classes equivalentes com três membros cada (figura – A, fração absoluta – B e fração relativa – C) a partir dos Treinos AB e BC; (2) as relações que mostrariam se as classes de equivalência se expandiriam com o ensino de mais uma fração relativa do conjunto D, E ou F correspondente às figuras; e (3) as relações entre novas figuras, frações absolutas e frações relativas.

Os resultados obtidos nos testes das relações de equivalência entre os estímulos dos conjuntos A, B e C replicaram resultados encontrados por pesquisas anteriores sobre

equivalência de estímulo (Sidman & Tailby, 1982) e sobre aprendizagem de fração e número decimal (Lynch & Cuvo, 1995; Leader & Barnes-Holmes, 2001). Esses resultados mostraram que o treino direto de poucas relações entre frações foi condição suficiente para a emergência de relações que não foram ensinadas explicitamente. Os altos escores nos testes de simetria, transitividade e equivalência mostraram que as três classes de frações equivalentes, $1/3$, $1/4$ e $1/5$, compostas pelas figuras, frações numéricas absolutas e frações numéricas relativas foram formadas. Os participantes foram ensinados diretamente a relacionarem as figuras às frações numéricas absolutas e estas últimas às frações numéricas relativas (*e.g.*, $1/3$ a $2/6$). O ensino dessas poucas relações permitiu o desenvolvimento de todas as relações entre as figuras e frações numéricas, estabelecidas direta ou indiretamente por meio da mediação de outros estímulos (de Rose, 1996).

Esses resultados replicaram os resultados de Lynch e Cuvo (1995) e Leader e Barnes-Holmes (2001), que mostraram ser possível formar classes de estímulos equivalentes entre frações sem a necessidade de treinar todas as relações diretamente. O trabalho de Lynch e Cuvo (1995) envolveu relações entre frações pictóricas, numéricas e decimais, enquanto no presente estudo as relações foram apresentadas como frações expressas nas formas numéricas e pictóricas. Em ambos ocorreu emergência de três classes de três membros, o que sugere ser a tecnologia de equivalência de estímulos uma forma eficaz para formar classes de frações matematicamente equivalentes.

Os resultados encontrados nos testes das relações D-(ABC), E-(ABCD) e F-(ABCDE), entretanto, replicaram apenas parcialmente os

dados de Sidman e Tailby (1982) e Sidman, Kirk e Willson-Morris (1985). No estudo de Sidman *et al.* (1985), o procedimento de discriminação condicional ampliou classes de estímulos equivalentes pela inclusão de um novo membro por treino direto. Em geral, os dados dos Grupos E1 e E2 mostraram maiores escores no teste das relações D-(ABC). Nos testes das relações E-(ABCD) e F-(ABCDE), os desempenhos foram inferiores e precisaram ser treinados diretamente. Mesmo após o treino de todas as relações entre os conjuntos A, B, C e D, a classe não se expandia com a inclusão de um membro de um novo conjunto (E e F). Será que se deve concluir, a partir desses resultados, que a aprendizagem de equivalência de frações não pode ser descrita apenas a partir da formação de classes de estímulos equivalentes? Apesar de ser uma afirmação plausível, é necessário, antes, avaliar possíveis fatores que podem ter influenciado os resultados, como o tipo de arranjo de treino. Exceto pelo Treino BC, o arranjo utilizado no presente estudo pode ser caracterizado como predominantemente uninodal, ou seja, um estímulo foi relacionado no treino a vários outros estímulos (Fields & Verhave, 1987), sendo as frações pictóricas o nodo relacionado às diversas frações numéricas. Estudos anteriores sugerem que o arranjo multinodal favorece a emergência de classes de equivalência (de Rose, 1996; de Rose *et al.*, 1997; Duarte & de Rose, 2006). Outro aspecto do procedimento que pode ter limitado a expansão das classes é a ausência de treinos que misturavam as relações treinadas após os Treinos AD, AE e AF. Cada um desses treinos ocorreu após a exposição a três testes diferentes e antes de novos testes com um número crescente de relações.

A ausência de revisão das relações treinadas anteriormente pode ter enfraquecido essas relações e limitado a emergência das novas relações que dependiam da manutenção de relações de linha de base.

Lynch e Cuvo (1995) e Leader e Barnes-Holmes (2001) relataram, também, variabilidade entre participantes e limitada generalização para novos estímulos com frações equivalentes nos testes realizados. No presente estudo, os testes de expansão de classes apresentaram escores, em geral, abaixo de 75% de acertos. Os testes realizados avaliaram a emergência de várias relações entre os elementos das classes anteriormente formadas e novas frações equivalentes, após o treino da relação entre a representação pictórica original e a nova representação numérica da fração. Em estudo anterior, foi avaliado apenas se o comportamento se generalizava para uma nova representação pictórica (Leader & Barnes-Holmes, 2001), e os resultados foram também variáveis e mais baixos do que os encontrados nos testes de simetria.

Os efeitos do treino de relações condicionais generalizaram-se para novas frações. Entre os sujeitos experimentais, os do Grupo E1 mostraram resultados mais altos nos Testes de Generalização do operante do que os do Grupo E2 (Figura 3), o que indica que a manutenção do numerador nos estímulos de comparação foi relevante também para o desenvolvimento de um operante generalizado de relacionar frações equivalentes. Os resultados da avaliação final mostraram, também, que a generalização ocorreu quando o contexto mudou para a sala de aula (avaliação final), com a tarefa estruturada como questões de prova e requerendo a resposta de assinalar com lápis. É surpreendente que os resultados

nesses testes tenham sido superiores aos encontrados nos testes de expansão de classes. Era esperado que os estudantes que aprenderam o operante generalizado de relacionar frações equivalentes também mostrassem escores altos em avaliações das relações entre elementos de classes já formadas e novas frações numéricas equivalentes. Estudos adicionais são necessários para uma maior compreensão dessa discrepância nos resultados.

Considerando as questões de investigação propostas pelo presente trabalho, pode-se concluir que o procedimento baseado no treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência possibilitou: a) a formação de três classes de equivalência de três membros; e b) o desenvolvimento de operante generalizado de relacionar frações equivalentes quando o ensino igualava o numerador das frações. O procedimento utilizado não foi eficaz, entretanto, para gerar expansão dessas classes para a maioria dos sujeitos após treinos adicionais entre novas frações numéricas equivalentes e as frações pictóricas das classes já formadas. Investigações futuras sobre o papel do arranjo de treino e de treinos mistos adicionais auxiliarão na compreensão das condições necessárias para a ocorrência de expansão de classes de estímulos matemáticos.

O presente trabalho foi uma contribuição da análise experimental do comportamento para o ensino do conceito de proporção em função da programação de contingências. Um mapeamento dos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento da noção de fração e de equivalência entre frações talvez indique quais aprendizagens são necessárias para que ocorram a expansão das classes e o desempenho generalizado.

REFERÊNCIAS

- Albuquerque, A. R., & Melo, R. M. (2005). Equivalência de estímulos: conceito, implicações e possibilidades de aplicação. In J. A. Rodrigues & M. R. Ribeiro (Orgs.). *Análise do comportamento: pesquisa, teoria e aplicação* (1a. ed., pp. 245-264). Porto Alegre: Artmed.
- Barnes-Holmes, Y., Barnes-Holmes, D., Smeets, P. M., Strand, P., & Friman, P. (2004). Establishing relational responding in accordance with more-than and less-than as a generalized operant behavior in young children. *International Journal of Psychology and Psychological Theory*, 4, 531-558.
- Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. (1988). Rational number learning aids: transfer from continuous models to discrete models. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10(4), 1-18.
- Bezuk, N. S. (1988). Fractions in the early childhood mathematics curriculum. *Arithmetic Teacher*, 35(6), 56-60.
- Carmo, J. S., & Prado, P. S. T. (2004). Análise do comportamento e psicologia da educação matemática: algumas aproximações. In M. M. C. Hübner & M. Marinotti (Orgs.). *Análise do comportamento para a educação: contribuições recentes* (pp. 115-136). Santo André: Esetec.
- Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1982). Na vida dez; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática. *Cadernos de Pesquisa*, 42, 79-86.
- Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática; desenvolvimento cognitivo e aprendizagem. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 67, 586-602.
- Carraher, T. N., Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Ruiz, E. R. L. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática: quantidades

- medidas por razões. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 67, 93-107.
- Carraher, D.W., & Schliemann, A. D. (1992). A compreensão de frações como magnitudes relativas. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 8, 67-78.
- Chiosi, L. (1984). Fractions revisited. *Arithmetic Teacher*, 31(8), 46-47.
- de Rose, J. C. (1996). Controlling factors in conditional discriminations and tests of equivalence. In T. Zentall & P. Smeets (Orgs.). *Stimulus class formation in human and animals* (pp. 253-277). Amsterdam: North-Holland.
- de Rose, J. C., Kato, O. M., Thé, A. P., & Kledaras, J. B. (1997). Variáveis que afetam a formação de classes de estímulos: estudos sobre efeitos do arranjo de treino. *Acta Comportamentalia*, 5, 143-163.
- de Rose, J. C., Souza, D. G., Rossito, A. L., & De Rose, T. M. J. (1989). Aquisição de leitura após história de fracasso escolar: equivalência de estímulos e generalização. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 5, 325-346.
- Duarte, G. M., & de Rose, J. C. (2006). A aprendizagem simbólica em crianças com déficit atencional. *Revista Brasileira de Educação Especial*, 12, 331-350.
- Fields, L., Landon-Jimenez, D.V., Bufington, D. M., & Adams, B.J. (1995). Maintained nodal-distance effects in equivalence classes. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 64, 129-145.
- Fields, L., & Verhave, T. (1987). The structure of equivalence classes. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 48, 317-332.
- Hart, K. M. (1993a). Fractions. In K. M. Hart (Ed.). *Children's understanding of mathematics* (pp. 67-81). London: John Murray.
- Hart, K. M. (1993b). Ratio and proportion. In K. M. Hart (Ed.). *Children's understanding of mathematics* (pp. 89-101). London: John Murray.
- Hiebert, J. (1987). Decimal fractions. *Arithmetic Teacher*, 34(7), 22-23.
- Kennedy, C. H., Itkonen, T., & Lindquist, K. (1994). Nodality effects during equivalence class formation: An extension to sight-word reading and concept development. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 27, 673-683.
- Leader, G., & Barnes-Holmes, D. (2001). Establishing fractional-decimal equivalence using a respondent type training procedure. *The Psychological Record*, 51, 151-165.
- Lima, J. M. de F. (1986). Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. In T. N. Carraher (Org.). *Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação* (pp. 81-127). Petrópolis: Vozes.
- Lovaas, O. I., Schreibman, L., Koegel, R., & Rehm, R. (1971). Selective responding by autistic children to multiple sensory input. *Journal of Abnormal Psychology*, 77, 211-222.
- Lynch, D. C., & Cuvo, A. J. (1995). Stimulus equivalence instruction of fraction-decimal relations. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 28, 115-126.
- Ninness, C., Barnes-Holmes, D., Rumph, R., McCuller, G., Ford, A. M., Payne, R., Ninness, S. K., Smith, R. J., Ward, T. A., & Elliott, M. P. (2006). Transformations of mathematical and stimulus functions. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 39, 299-321.
- Ninness, C., Rumph, R., McCuller, G., Harrison, C., Ford, A. M., & Ninness, S. (2005). A functional analytic approach to computer-interactive mathematics. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 38, 1-22.
- Prado, P. S. T., & de Rose, J. C. (1999). Conceito de número: uma contribuição da análise comportamental da cognição. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 15, 227-235.
- Quintero, A. H. (1987). Helping children understand ratios. *Arithmetic Teacher*, 34(99), 17-21.
- Santos, A. C. G. (1999). Equivalência de frações: como anda a compreensão dos alunos?. *Estudos:*

- Revista da Universidade Católica de Goiás*, 26(2), 233-249.
- Saunders, R. R., & Green, G. (1999). A discrimination analysis of training-structure effects on stimulus equivalence outcomes. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 72, 117-137.
- Schliemann, A. D. (1986). As operações concretas e a resolução de problemas de matemática. In T. N. Carraher (Org.). *Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação* (pp. 69-80). Petrópolis: Vozes.
- Sidman, M. (1985). Aprendizagem sem erros e sua importância para o ensino do deficiente mental. *Psicologia*, 11, 1-15.
- Sidman, M. (1986). Functional analysis of a emergent verbal classes. In T. T. Thompson & M. D. Zeiler (Eds.). *Analysis and integration of behavioral units* (pp. 213-245). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sidman, M. (1990). Equivalence relations: where do they come from?. In D. E. Blackman & H. Lejeune (Eds.). *Behavior analysis in theory and practice: contributions and controversies* (pp. 93-113). London: Erlbaum.
- Sidman, M. (1992). Equivalence relations: some basic considerations. In S. C. Hayes & L. J. Hayes (Eds.). *Understanding verbal relations* (pp. 15-27). Reno, Nevada: Context Press.
- Sidman, M., & Cresson, O. Jr. (1973). Reading and crossmodal transfer of stimulus equivalence in severe retardation. *American Journal of Mental Deficiency*, 77, 515-523.
- Sidman, M., Kirk, B., & Willson-Morris, M. (1985). Six-member stimulus classes generated by conditional-discrimination procedure. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 43, 21-42.
- Sidman, M., & Tailby, W. (1982). Conditional discrimination vs. matching to sample: an expansion of the testing paradigm. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 37, 5-22.
- Skypek, D. H. B. (1984). Special characteristics of rational numbers. *Arithmetic Teacher*, 31(6), 10-12.
- Spinillo, A. G. (1992). A importância do referencial de metade e o desenvolvimento do conceito de proporção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 8, 305-317.
- Spinillo, A. G. (1993). As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 9, 349-364.
- Stromer, R., Mackay, H. A., & Stoddard, L. T. (1992). Classroom applications of stimulus equivalence technology. *Journal of Behavioral Education*, 2(3), 225-256.
- Thompson, P. W. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic teacher*, 41(9), 556-558.
- Tinoco, L. A. A., & Lopes, M. L. M. L. (1994). Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, 2, 13-18.
- Vance, J. H. (1992). Understanding equivalence: a number by any other name. *School Science and Mathematics*, 92(5), 263-266.